Електромагнітний відгук.

1. Визначення ядра електромагнітного відгуку та його основні властивості, пов'язані зі збереженням струму та калібрувальною симетрією.

Без сумнівів, найважливішим прикладом відгуку є електромагнітний відгук.
Припустимо, що система заряджених частинок знаходиться в електром. полі, яке задано за допомогою скалярного потенціалу $\varphi(\vec{r}, t)$ та/або векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r}, t)$.
Представимо ці потенціали як $1+d$-мірний потенціал (покладаємо $c=1$!)
$A^\mu(x) \equiv (\varphi(x), \vec{A}(x))$, де $x \equiv (t, \vec{r})$ – $1+d$-мірний просторово-часовий вектор.
Система відгукується на збурення перерозподілом заряду, $\rho(x) \equiv \langle \hat{\rho}(x) \rangle$, та/або появою струму, $\vec{j}(x) \equiv \langle \hat{\vec{j}}(x) \rangle$.
Знову таки об'єднаємо їх в $1+d$-мірний ~~вектор~~ $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.
Таким чином, можемо сформулювати нашу задачу – знайти лінійний функціонал
$j = K[A] + O(A^2)$, який зв'язує струм та керуючий потенціал.

Точніше, Увага! Це визначення з „+".

$$(*) \quad j_\mu(x) = \int_{t'<t} dx' K_{\mu\nu}(x,x') A^\nu(x'),$$

де умова $t'<t$ показує, що відгук запізнюючий.
Потім ми підемо вже згаданим шляхом – обчислимо відгук в уявному часі, $K(\vec{r},\vec{r}\,';i\omega_n)$, а потім аналітичне продовження $i\omega_n \to \omega+i0$.

Заувага! Тут є тонкий момент, що A^ν – це не просто зовнішнє збурення, а повний потенціал (поле), тобто результат як прикладеного збурення, так і внутрішніх полів у твердому тілі, які створюють струми, викликані зовнішнім збуренням.
Див. книжку Mahan, 3rd. edition p. 760.
Див. те саме в книзі Schrieffer „Theory of superconductivity" p. 206.
У надпровіднику це сильніший ефект! Зовнішнє магнітне поле створює надструми, які генерують магн. поле, що скорочує зовнішнє поле усередині зразку. Ефект Мейснера!
Фактично розглядаємо вже повне поле як зовнішнє.

Почнемо з того, що отримаємо два фундаментальні обмеження, якими має задовільняти ядро K.
(Це до речі, досить звичайне позначення, у Фрідофера це $J_\mu = -\frac{c}{4\pi}\int K_{\mu\nu}(\dots)A_\nu$ see (8-12) p. 208.
Так само у книзі Садовського, (5.230), p. 227.)

По-перше, якщо $A_\mu = \partial_\mu f$ є чистою калібровкою, то струм дорівнює нулю.
Підставимо це A^μ до (*):

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t'<t} dx' K_{\mu\nu}(x,x')\partial^\nu f(x') =$$

$$= -\int_{t'<t} dx' \left(\partial^\nu_{x'} K_{\mu\nu}(x,x')\right) f(x').$$

Оскільки ф-я f є довільною, то

$$0 = K_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}^\nu_{x'}.$$

По-друге, струм має зберігатися, тобто $\partial^\mu j_\mu = 0$, або

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t'<t} dx' \partial^\mu_x K_{\mu\nu}(x,x') A^\nu(x').$$

Оскільки A^ν довільно, то $\overrightarrow{\partial}^\mu_x K_{\mu\nu} = 0$.

Далі ми побачимо, що оскільки

$K_{\mu\nu}(x,x') = K_{\nu\mu}(x',x)$, то

співвідношення, пов'язані з калібров. інваріантністю та збереженням кількості частинок взаємопов'язані.

Тепер перейдемо до формального отримання ядра відгуку.

Зв'язок матерії з класичним електром. полем задається співвідношенням

$$j_\mu = -\frac{\delta S_c[\vec{A}]}{\delta(A_\mu/c)}.$$

Тут „с" означає тільки ту частину дії, яка зв'язує матерію та пробне поле, але не включає зовнішнє поле, якщо воно є в задачі.

Зверніть увагу на те, що оскільки у фізиці конденс. стану H може бути $H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$ та є член $\sim \vec{A}^2$ (так зв. діамагнітний), то струм ми визначили саме так, а не як зазвичай в КТП:

$$S_c = -\int dx\, j_\mu A_\mu. \quad (\text{тут } c=1).$$

Відзначу, що інваріантною комбінацією є завжди величина $-\rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A}$, незалежно від того чи розглядаємо ми дію в дійсному часі $(t, \vec{r})$, чи перейшли до уявного часу

2. Загальний вираз для електром. відгуку.

Нагадаю загальну формулу для ф-ї відгуку, яку ми колись записали через функціональні похідні в уявному часі:

$$\chi(\tau, \tau') = -Z^{-1} \frac{\delta^2}{\delta F(\tau)\,\delta F'(\tau')} Z[F, F']\Big|_{F=F'=0}.$$

Оскільки раніше в нас було
$X = \frac{\delta S[F,\Psi,\bar\Psi]}{\delta F}$, а зараз $\vec{j} = -\frac{\delta S}{\delta(\vec{A}/c)}$ з
додатковим „-", що електромагнітне
ядро в нас визначається без „-":

$$K_{\mu\nu}(x,x') = Z^{-1}\frac{\delta^2}{\delta\left(\frac{A_\mu(x)}{c}\right)\delta\left(\frac{A_\nu(x)}{c}\right)} Z[A]\Big|_{A=0}$$

Altland часто кладе $c=1$.

Звідси випливає вже згадана
властивість $K_{\mu\nu}(x,x') = K_{\nu\mu}(x',x)$.

Тепер розглянемо більш
конкретний випадок мікроскопічної
теорії з дією Шредінгера.
Це може бути як бозе-, так і
фермі-система у зовнішньому е.-м.
полі:

$$S[\bar\Psi,\Psi,A] = \int dx\, \bar\Psi_\sigma\Big(\partial_\tau + e\phi + \frac{1}{2m}\big(-i\partial - \frac{e}{c}A\big)^2$$

$$-\mu + V_0\Big)\Psi_\sigma + S_{int}[\bar\Psi,\Psi], \qquad (*)$$

де V_0 — незалежний від електричного
поля потенціал (наприклад, гратки).

Увага! На с. 391 Altland поклав
$\hbar = e = c = 1$. Це я відновив.
Але є ще один важливий момент.
З класичної механіки пам'ятаємо
загальне правило:
$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})$, що
давало нам правильний вираз для
сили Лоренца: $m\ddot{\vec{X}} = \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B}) + q\vec{E}$

Відповідно, в квантовій механіці

$-i\hbar\vec{\nabla} \to -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}$. Див. Фейнманівські лекції вип. 8-9 §74.3

Далі можливі два варіанти як саме ми беремо до уваги те, що за домовленістю заряд електрона є від'ємним.

1. Вважаємо, що саме $e > 0$ і тоді усюди явно пишемо $-e$: струм $\vec{j} = -en\vec{v}$, заряд $\rho = -en$. Це дає
   $-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}$, тобто буде комбінація
   $\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}$.

Останні роки я особисто використовую саме це позначення. Так мені легше відслідковувати „–" там де воно взагалі має значення. Часто в взагалі входить e^2!

Багато книжок використовують це позначення. Nagaosa, або той же підручник Giuliani та Vignale використовують якраз них. Хоча, дивно, в Vignale у 10 розділі магнітне поле дивиться вниз. Також огляд M. Goerbig. Але Altland та Simons якраз НЕ використовують його!

2. Це так зване позначення de Gennes, коли „–" ховається всередині $e \equiv -|e|$.

Ч Altland одні місця протирічать іншим!

У попередні роки я, оскільки читав лекції за Altland, то намагався дотримуватися його положень.

Але зараз краще перейду на $-e<0$.

Перевіряйте! бо можу десь помилитися.

$$j_i^A = -\frac{\delta S}{\delta(A_i/c)} = -\frac{e^2}{m}\bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma \frac{A_i}{c} + i\frac{e\hbar}{2m}\left(\bar{\psi}_\sigma \partial_i \psi_\sigma - \partial_i \bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma\right).$$

$$\frac{\delta S}{\delta(A_i/c)} = \frac{\delta H}{\delta(A_i/c)}$$

Індекс „A" означає залежність від $\vec{A}$.

$$= \frac{e}{2m}\bar{\psi}_\sigma\left(+i\hbar\overleftrightarrow{\partial_i} - \frac{2e}{c}A_i\right)\psi_\sigma, \text{ де}$$

$$f\overleftrightarrow{\partial_i} g \equiv f\partial_i g - (\partial_i f) g.$$

Знайдемо $K_{\mu\nu}(x,x')$.

Нагадаю, що за визначенням

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(F[f+\varepsilon\delta(x)] - F[f]\right).$$

$$K_{\mu\nu}(x,x') = Z^{-1}\frac{\delta^2}{\delta A_\mu(x)\,\delta A_\nu(x')}\Bigg|_{A=0}\int D(\bar{\psi},\psi)\, e^{-S[\bar{\psi},\psi,A]} =$$

Я поклав $c=1$! $\quad J_\mu^A = -\frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu}$.

$$= Z^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\nu(x')}\Bigg|_{A=0}\int D(\bar{\psi},\psi)\, j_\mu^A(x)\, e^{-S[\bar{\psi},\psi,A]} =$$

$$= \Big\langle +\delta(x-x')\delta_{\mu\nu}\underbrace{\partial_{A_\mu(x)} j_\mu^A(x)}_{= -\frac{e^2}{m}\bar{\psi}(x)\psi(x)} + j_\mu(x)\, j_\nu(x')\Big\rangle\Big|_{A=0},$$

де $\langle\ldots\rangle$ означає функціональне усереднення.

8

Поклавши $A=0$ отримаємо відповідь:

густина →

$$K_{\mu\nu}(x,x') = -\frac{e^2}{m}\delta(x-x')\delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu 0})\langle\hat{n}(x)\rangle + \langle\hat{j}^p_\mu(x)\hat{j}^p_\nu(x')\rangle . \qquad (*)$$

Перший член називається діамагнітним, він виникає з $\sim A^2$ члена гамільтоніана.

$\hat{j}^p = \hat{j}|_{A=0}$ наз. парамагнітним током, а член $\langle\hat{j}^p\hat{j}^p\rangle$ наз. парамагнітним.

$(*)$ описує усі електромагнітні явища.

K_{ii} $i=1,2,d$ дає повздовжню провідн. системи.

K_{00} – відгук густина-густина, який ми вже розглядали.

$K_{i\neq j}$ – холлівська провідність.

Коли ми розглядали відгук густина-густина, то брали скалярний потенціал $V(\vec{r},t) = -e\phi(\vec{r},t)$.

Але його як раз можна усунути відповідним калібрувальним перетворенням:

$$\phi(\vec{r},t) \to \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t},$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t).$$

$$\Lambda(\vec{r},t) = c\int_0^t \phi(\vec{r},t)\,dt$$

Це ~~означає~~ означає, що з'явиться повздовжній вект. потенц. $\vec{A}(\vec{r},t) = c\int_0^t \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) = -\frac{c}{e}\int_0^t \vec{\nabla}V(\vec{r},t).$

3. Електромагнітний відгук у випадку системи на гратці.

Тепер давайте ще раз продовжимо наш розгляд, але візьмемо електронну систему на гратці:

$$H = H_0 + H_{int},$$

$$H_0 = -\sum_{i,j,\sigma} t_{ij} c^{+}_{i\sigma} c_{j\sigma} - \mu \sum_{i,\sigma} c^{+}_{i\sigma} c_{i\sigma},$$

де t_{ij} — параметр перескоку, $c^{+}_{i\sigma}$, $c_{i\sigma}$ — оператори народження та знищення електронів на місці i.

Нагадаю, що якщо ми розглянемо квадратну двовимірну гратку, то в імпульсному просторі матимемо такий з-н дисперсії:

$$\varepsilon(\vec{k}) = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a),$$ де

a — постійна гратки.

Зараз я слідую нашому огляду у Фізика низьких температур (ФНТ) 32, 700 (2006) (там дещо інші познач.), Але більше схоже на підручник Горбар..!

Див. також D. J. Scalapino, S. R. White, S. Zhang, Phys. Rev. B 47, 7995 (1993).

Як ввести векторний потенціал у модель на гратці, бо „minimal coupling" $-i\vec{\nabla} \to -i\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}$ (покладаємо $\hbar = 1$). не працює?

10

Для цього була запропонована так звана заміна Пайерлса:

$$a^+_{i\sigma} a_{j\sigma} \to a^+_{i\sigma} \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_j^i \vec{A}\, d\vec{r}\right) a_{j\sigma},$$

яка вводить в гамільтоніан фазовий множник, пов'язаний з е.-м. полем.

Далі ми беремо $H(\vec{A})$ та розкладаємо його до 2-го порядку по $\vec{A}$.

$$H(\vec{A}) = H(0) - \sum_{\vec{n}} \left[\frac{1}{c} A_i(\vec{n})\, j^p_i(\vec{n}) - \frac{1}{2c^2} A_i(\vec{n})\, \tau_{ij}(\vec{n}) A_j(\vec{n}) \right].$$

Тут я позначив вузли ґратки як $\vec{n}$, а індекси просторових координат як i та j.

$j^p_i(\vec{n})$ – це парамагнітний струм, а $\tau_{ij} \equiv \dfrac{\delta^2 H}{\delta(A_i/c)\,\delta(A_j/c)}$ – діамагнітний тензор.

Повний електричний струм (точніше, густина струму)

$$j_i(\vec{n}) = -\frac{\delta H}{\delta(A_i/c)} = j^p_i(\vec{n}) - \tau_{ij}(\vec{n}) A_j(\vec{n})/c.$$

Обчислення $\langle j_i(\vec{q}, \omega) \rangle$ за допомогою теорії лінійного відгуку і дасть нам той же результат, який ми обговорювали вже раніше. Тут ми запишемо тільки його просторову частину та, відповідно, Фур'є перетворення:

$J_\mu(q) = K_{\mu\nu}(q) A_\nu(q)$, де

$q = (\vec{q}, \omega)$, я також включив знову густину (K_{00}),

$K_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = K_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m \to \omega + i0)$,

$K_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\langle \tau_{\mu\nu} \rangle \delta_{\mu\nu} (1 - \delta_{\nu 0}) -$

$- \Pi_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m)$ з $\Omega_m = 2\pi m T$ та

$$\Pi_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\int_0^\beta d\tau\, e^{i\Omega_m \tau} \langle T_\tau \hat{j}_\mu(\vec{q}, \tau) \hat{j}_\nu(-\vec{q}, 0) \rangle .$$

Для того, хто буде дивитися підручник Giuliani - Vignale відзначу, що там під струмом розуміється потік частинок $\vec{j}$, а електричний струм (густина), відповідно, $\vec{J} = -e\vec{j}$.

Оператор струму частинок там (у представленні первинного квантування):

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\hat{\vec{v}}_i \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i) + \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i) \hat{\vec{v}}_i \right],$$

де оператор швидкості

$$\hat{\vec{v}}_i = \frac{1}{m} \left[\hat{\vec{p}}_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\hat{\vec{r}}_i) \right].$$

$$\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

Відповідно,

$$\hat{\vec{j}}(\vec{r}) = \hat{\vec{j}}_p + \frac{e}{mc}\hat{n}(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}),$$ де

$\hat{\vec{j}}_p$ – оператор парамагнітної густини струму частинок

$$\hat{\vec{j}}_p(\vec{r}) = \frac{1}{2m}\sum_i\left[\hat{\vec{p}}_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\hat{\vec{p}}_i\right].$$

Відповідний вираз для парамагнітного лінійного відгуку (це загальний випадок без трансляційної інваріант.)

$$\langle\hat{j}_{p_i}\rangle(\vec{q},\omega) = \frac{e}{c}\sum_{\vec{q}'}\chi_{j_{p_i}j_{p_j}}(\vec{q},\vec{q}',\omega)A_j(\vec{q}',\omega),$$

де $\chi_{j_{p_i}j_{p_j}}(\vec{q},\vec{q}',\omega)$ – Фур'є перетворення до-і

$$\chi_{j_{p_i}j_{p_j}}(\vec{r},\vec{r}',t) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t)\left\langle\left[\hat{j}_{p_i}(\vec{r},t),\hat{j}_{p_j}(\vec{r}')\right]\right\rangle_0.$$

Для порівняння нагадаю, що для відгуку густина-густина в нас були відповідні означення

$$\chi_{nn}(\vec{r},\vec{r}',t) \equiv \chi_{n(\vec{r})n(\vec{r}')}(t) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t)\left\langle\left[\hat{n}(\vec{r},t),\hat{n}(\vec{r}')\right]\right\rangle_0.$$

$$\chi_{nn}(\vec{q},\vec{q}',\omega) \equiv \frac{1}{L^d}\int d^d r\, e^{-i\vec{q}\vec{r}}\int d^d r'\, e^{i\vec{q}'\vec{r}'}\times\int_0^\infty dt\,\chi_{nn}(\vec{r},\vec{r}',t)e^{i\omega t},$$