Базиси в векторних просторах

$$\vec{l} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис якщо

1) довільний вектор можна представити як лін. комбін. $\{e_1, \ldots, e_n\}$

2) представлення однозначне

Лінійна незалежність векторів $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = 0$$

тільки якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

$$l = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$$

$$- \; l = a_1'e_1 + \ldots + a_n'e_n$$

$$0 = \underbrace{(a_1 - a_1')}_{= 0!}e_1 + \ldots + \underbrace{(a_n - a_n')}_{= 0}e_n$$

Умова (2) для базису

$\Leftrightarrow$ лінійна незалежність

Лема: сім'я векторів $\{e_1, \dots, e_n\}$ лінійно залежна

$\Leftrightarrow$ надо хоч один елемент представл. як лін. комбінацію інших

$\Rightarrow$ Нехай $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0$

$\underbrace{a_1 \neq 0}$ $\Rightarrow e_1 = -\frac{a_2}{a_1} e_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} e_n$

$\Leftarrow$ Н

$e_1 = b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$

$1 e_1 - b_2 e_2 - \dots - b_n e_n = 0$

$1 \neq 0$ лінійна залежність

Приклади:

$\{\text{Матриці } (m \times n)\} = V$

$m\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{n}$

матричні одиниці

$E_{ij} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim V = m \cdot n$

$\{\text{Комплексні матриці } 2\times 2\}$ V

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 4$

$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} - \text{дійсні матриці}\right\} = W$

$\dim_{\mathbb{R}} W = 4$

V - компл. 2×2 матриці розглядаємо над полем $\mathbb{R}$

Базис? / Розмірність

$\begin{pmatrix} i & 2 \\ -3 & 1+i \end{pmatrix}$

$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$

$iE_{11}, iE_{12}, iE_{21}, iE_{22}$

$V \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V = 8$

$\boxed{V = \mathbb{C}}$ - векторний простір над полем $\mathbb{R}$

$e_1 = 1, \; e_2 = i$

$\alpha = a_{R} \cdot e_1 + a_{im} e_2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

$e_1 = 1+i$

$V = \mathbb{R}$ - вект. простір над $\mathbb{Q}$

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

Базис Гамеля

$V = Mat(n \times n)$ $\dim V = n^2$

$V_s = \{A \mid A^T = A\}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

Задие -? $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = e_2$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $e_1 - 2e_3$

$e_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V_A = \{A \mid A^T = -A\}$ $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

$e_2' = \dfrac{e_2 - e_1' - e_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{11}, E_{22}, \dots E_{nn}$

$E_{12} + E_{21}$,

$E_{23} + E_{32}$

$E_{13} + E_{31}$

$\vdots$

$\dim V = $

$n \times n$

$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ -* & 0 & * \\ -* & -* & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} =$

$= a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n^2 - n}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$E_{12} - E_{21}$, $E_{13} - E_{31}$, $E_{23} - E_{32}$

$\dim V_A = \dfrac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1)$

$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & 0 & * & * \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Многочлены степени $\le n$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Базис-? $e_0 = 1,\ e_1 = x,\ e_2 = x^2,\ \dots\ e_n = x^n$

$\dim V = n+1$

$f_0 = 1,\ f_1 = (x-\alpha),\ f_2 = (x-\alpha)^2,\ \dots,\ f_n = (x-\alpha)^n$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$a_0 1 + a_1 x = 0,\ \forall x$

a_0, a_1 - ?

$x=0:\ a_0 = 0$

$x=1:\ a_0 + a_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

Д3

$P(x) = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \dots + b_n f_n$

$b_0, b_1, \dots b_n$ - ?

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = P(x) = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \dots + b_n(x-\alpha)^n$

задается многочлен $P(x)$

b_i - ?

$\alpha = 2$

$f_0 = 1,\ f_1 = x-2$

лин. незав? $a_0 f_0 + a_1 f_1 \overset{!}{=} 0\ \forall x$

$a_0 + a_1(x-2) \overset{!}{=} 0$

$x=2:\ a_0 = 0$

$x=1:\ a_1 = 0$