Векторні простори

$L \ni l_1, l_2$, $K \ni a$

$l_1 + l_2$, al

+ Аксіоми

- $(l_1 + l_2) + l_3 = l_1 + (l_2 + l_3)$
- $\exists 0 : 0 + l = l + 0 = l \quad \forall l \in L$
- $\forall l : \exists (-l) : l + (-l) = 0$
- $l_1 + l_2 = l_2 + l_1 \quad \forall l_1, l_2$

- $a(bl) = (ab)l$
- $1 \cdot l = l \quad \forall l$
- $(a+b)l = al + bl$
- $a(l_1 + l_2) = al_1 + al_2$

$L = \mathbb{R}_{>0}$ - дійсні додатні

$K = \mathbb{R}$

$l_1 " + " l_2 = l_1 l_2 \qquad "0" = 1$

$a " \cdot " l = l^a \qquad "-l" = 1/l$

$(a+b)l = a\cdot l + b\cdot l \Leftrightarrow l^{a+b} = l^a \cdot l^b$

$a(l_1+l_2) = al_1 + al_2 \Leftrightarrow (l_1 l_2)^a = l_1^a l_2^a$

---

1. Приклади:

- $\mathbb{R}^n$ $l = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
- $Mat(n \times m)$
- Pol_d $p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$

  $\deg p(x) \le d$
- $\mathbb{C}$ - векторний простір над $\mathbb{R}$

Базис векторного простору L

$\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$

$l = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \dots a_n l_n$

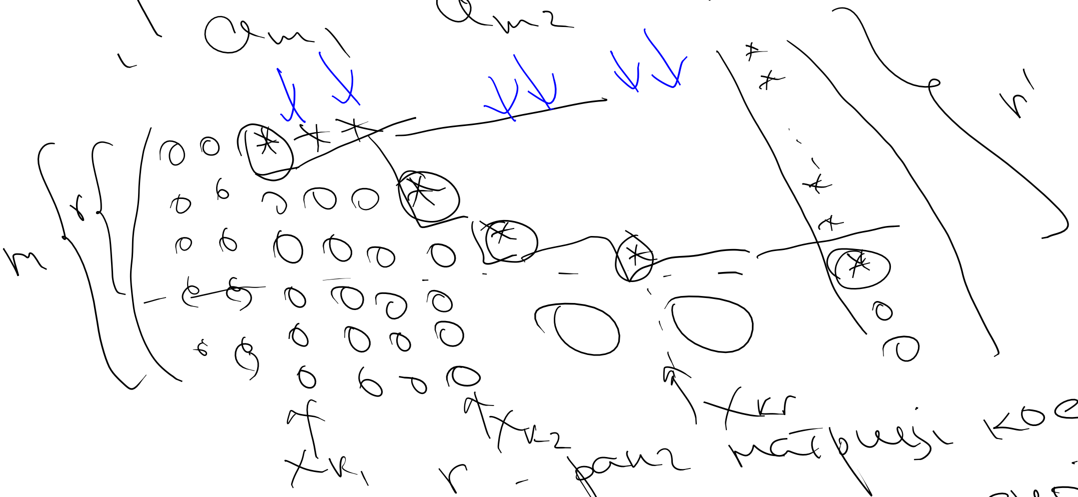
- $\forall l$:- предст. як лінійна комбінація
- Представлення однозначне

Якщо ці дві умови викон. "базис $\{l_1, \dots l_n\}$ назив. базис"

$\dim L = n$ - кількість елементів базисі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$



r – ранг матриці коеф.

r' – ранг розширеної матриці коеф.

Якщо $r' = r+1$ – система не має розв'язків

$r' = r$ має розв'язки

$x_{k_1} = b_1 - \cancel{x} \dots - \cancel{x} \dots$

$$\underbrace{x_2} + \underline{2x_3} - 4x_4 = 1$$

$$\underbrace{x_4} - \underline{x_5} + x_6 = 2$$

$$\underbrace{x_6} = 7$$

$x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 + x_4$

$x_4 = 2 + x_5 + x_6$

$x_6 = 7$

x_1, x_3, x_5 вільні змінні

$(n - r)$ - вільних змінних

Якщо $n - r = 0$ - трикутний вигляд

вільних змінних немає

$\Rightarrow$ єдиний розв'язок

Однорідна система рівнянь

$b_1, b_2, \dots, b_m = 0$

$b_1 = 0$, $b_2 = 0$

$$m\left\{\left(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n}\;\middle|\;\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\right)\right.$$

Якщо $n > m$ завжди існує безліч розв'язків (нетривіальних)

Нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в L

$\{e'_1, \dots, e'_m\}$ - базис (?) $m > n$

$\vec{0} = 0\vec{e}_1 + \dots + 0\vec{e}_n$

$\vec{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i$

$0 = \sum_{k=1}^{m} x_k \vec{e}'_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_k a_{ik} \vec{e}_i$

$= \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k a_{ik} \right)}_{\overset{?}{=} 0}$

$\sum_{k=1}^{m} x_k a_{ik} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ - змінних} \\ n \text{ - рівнянь} \end{array} \right.$

Якщо $m > n$ – існують нетрив. розв'язки

$0 = \sum_{i=1}^{\dots} \dots e'_i$, $\ne 0$

$\Rightarrow e'_i$ – не базис оскільки є неоднозначний розклад

$\boxed{\text{ДЗ}}$ • Mat $(n \times m)$ – базис? розмірність

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ → • симетр. матр $n \times n$ – базис? розм?

$A^T = A$

$A^T = -A$ • антисим матр.

• простір многочленів степеня $\le d$ базис? розмір?