Лінійні відображення

$f: L \to M$ — простори над K

f лінійне відображення $\begin{cases} \bullet\ f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) \\ \bullet\ f(\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{a} l) = a f(l) \end{cases}$

$\forall l_1, l_2, l, a$

$\frac{d}{dx}$: простір многочленів від x степені $\leq d$ $\to$

$p'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}}(p(x))$

$\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x - 2) = 10x + 3$

$\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$ — базис

$\frac{d}{dx}: L \to L$

лінійне відображення
= лінійний оператор

$f: L \to M$

Якщо f — лінійне відображення

$$l = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$$

e_i — базисні вектори

$$f(l) = f(a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n)$$
$$= a^1 f(e_1) + a^2 f(e_2) + \dots + a^n f(e_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a^i \underbrace{f(e_i)}$$

$L = \langle 1, x, x^2, \dots, x^5 \rangle$ — простір, породжен…

лінійна оболонка

linear span

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

$$f: \overset{n}{L} \to \overset{m}{M}$$
$$\{e_i\} \to \{g_k\}$$

$$f(e_1) = \sum_{j=1}^{m} g_j \underline{\underline{a_{j1}}}$$
$$f(e_2) = \sum_{j=1}^{m} g_j \underline{\underline{a_{j2}}}$$
$$\vdots$$
$$f(e_n) = \sum g_j \underline{\underline{a_{jn}}}$$

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & \\ \downarrow & \downarrow & \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \end{pmatrix}$$ — матриця оператора f

Приклад: матриця оператора $\frac{d}{dx}$ в базисі

$\frac{d}{dx} : L \to L$

$$\{\underset{\substack{\| \\ e_1}}{1}, \underset{\substack{\| \\ e_2}}{x}, \underset{\substack{\| \\ e_3}}{x^2}\}$$

$$\frac{d}{dx} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$p(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{p}$$

$$D\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 4x + 1$$

$$p'(x) = 4x + 1$$

$$f(l) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a^i f(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_{ji} e_j}_{= f(e_i)} a^i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e_j \underline{\left(\sum_{i=1}^{n} f_{ji} a^i\right)}$$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} N$$

$$h(f(l))$$

$$h(f(l_1+l_2)) = h(f(l_1)+f(l_2))$$
$$= h(f(l_1)) + h(f(l_2))$$

$$(h\circ f)(l_1+l_2) = (h\circ f)(l_1) + (h\circ f)(l_2)$$

$f \to A$ - матрица

$h \to B$

$$L \to M \to N$$

$$(h\circ f) \to B\cdot A$$

$$(h\circ f)(e_i) = h(f(e_i)) = h\left(\sum_{j=1}^{m} e'_j A_{ji}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \underbrace{h(e'_j)}_{\sum_{k=1} e''_k B_{kj}}$$

$$= \sum_{k} e''_k \underbrace{\sum_{j=1}^{m} B_{kj} A_{ji}}_{(BA)_{ki}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{d}{dx}\circ\frac{d}{dx}$$
$$\downarrow$$
$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= D^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ядро та образ лінійного відображення

$f: L \to M$

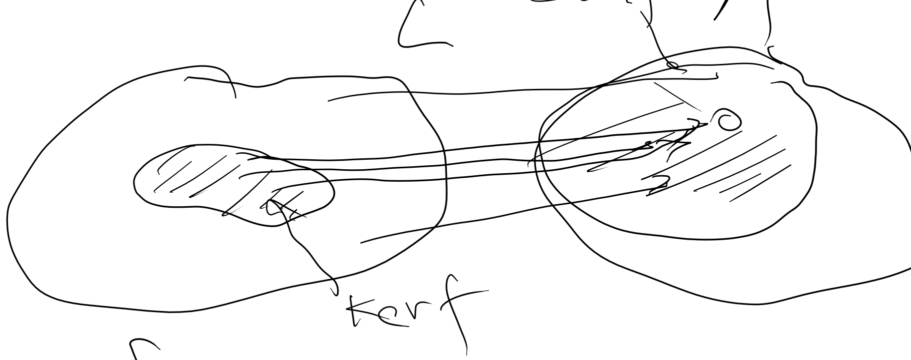
$\mathrm{Ker} f = \{ l \in L,\ f(l) = 0 \}$ — ядро

kernel

$\mathrm{Im} f = \{ f(l) \}_{l \in L}$ — образ

Image

$\mathrm{Ker} f$



$\mathrm{Ker} f$ — векторний підпростір в L

$\mathrm{Im} f$ — векторний підпростір в M

Приклад: Нехай L — простір многочленів степені $\le d$

$\mathrm{Ker} \frac{d}{dx} = \mathbb{C}$ — многочлен степені 0

$\mathrm{Im} \frac{d}{dx}$ — многочлени степені $\le d-1$

$f: L \to M$

$l_1, l_2 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow l_1 + l_2 \in \operatorname{Ker} f$

$$f(l_1+l_2) = \underbrace{f(l_1)}_{=0} + \underbrace{f(l_2)}_{=0} = 0$$

$l \in \operatorname{Ker} f$. $f(al) = a\underbrace{f(l)}_{=0} = 0$

$g_1, g_2 \in \operatorname{Im} f \quad \exists\, l_1, l_2 \in L : \quad f(l_1) = g_1, \; f(l_2) = g_2$

$$g_1 + g_2 = f(l_1) + f(l_2) = f(l_1 + l_2) \in \operatorname{Im} f$$

$\dim \operatorname{Im} f$ – ранг відображення

Теорема: Нехай $f: L \to M$ є лінійним відображенням, $\dim L < \infty$

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim L$$

$D = \frac{d}{dx}$ діє в просторі квадратичних многочленів

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} D}_{1} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} D}_{2} = 3$$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker}(D^2)}_{2} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} D^2}_{1} = 3$$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} D^3}_{3} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} D^3}_{0} = 3$$

Доведення: $f: L \to M$

$Ker f$ - підпростір в L

Нехай $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ базис в $\underline{Ker f}$

Добудуємо до базису в L

Нехай $e_{m+1} \notin Ker f$

Тоді $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ лін. незалежні

якщо $\exists$ нетрив. лін. комб $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m + c_{m+1} e_{m+1} = 0$

Якщо $c_{m+1} = 0 \Rightarrow \{e_1, \dots, e_m\}$ не базис

Якщо $c_{m+1} \neq 0$

$e_{m+1} = -\frac{c_1}{c_{m+1}} e_1 \dots$

$\uparrow$ $Ker f$

$\{\underbrace{\{e_1, \dots, e_m\}}_{\text{базис } Ker f} e_{m+1}, \dots, e_n\}$

$l = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i \qquad f(l) = \sum_{i=1}^{n} a^i f(e_i)$

$= \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} a^i f(e_i)}_{Im f}$

$\dim Im f \overset{?}{=} n - m \overset{?}{=} rk f$

$\{f(e_{m+1}), f(e_{m+2}), \dots, f(e_n)\}$

??? – лінійно незалежні

∃ нетрив. лін. комб.

$a_{m+1} f(e_{m+1}) + \dots + a_n f(e_n) = 0$

$\Rightarrow f(\underbrace{a_{m+1} e_{m+1} + \dots + a_n e_n}_{\in \operatorname{Ker} f}) = 0$

$\parallel$

$-a_1 e_1 - a_2 e_2 + \dots - a_m e_m$

∃ a_i нетрив. $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$, а це суперечить умові, що $\{e_i\}$ – базис

f – ін'єктивне лінійне відобр

$f(l_1) = f(l_2)$ тільки $l_1 = l_2$

$f(\underbrace{l_1 - l_2}_{\in \operatorname{Ker} f}) = 0$

$\operatorname{Ker} f$ – тривіальне ядро

$\dim \operatorname{Im} f = \dim L$

$p(x,y) = x^2 y + 5xy^2$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2xy + 5y^2$$

partial derivative

Д/З Показати, що множина однорідних многочленів від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ степені $= d$ утворюють векторний простір

Розмірність простору?

$\boxed{n=3}$ x, y, z

(n=3)

~~базис~~

$d=0$: 1 — 1

$d=1$: 3 — x, y, z

$d=2$: 6 — $x^2, xy, yz, x^2, y^2, z^2$

$\vdots$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – оператор Лапласа

$\Delta h = 0$ ← гармонійні многочлени

$\ker \Delta$

Розмірності простору гарм. многочленів від x, y, z степені $0, 1, 2, \dots$