Лінійні відображення

L - векторний простір

L^* - векторний простір лінійних функціоналів на L

= дуальний простір до L

Якщо L векторний простір многочленів

$L^* \ni$ значення многочлена в певній точці

$$P(x) \mapsto P^{(k)}(\alpha)$$

k - похідна

$\{e_k\}$ - базис в L

$\{e^s\}$ - базис в L^*

$e^s(e_k) = \delta^s_k$

— дуальний базис до $\{e_k\}$

Лінійні відображення
векторного простору L
в векторний простір M
над тим самим полем K

$f: L \to M$

лінійність відображення
1) $f(al) = af(l)$
2) $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$

$a \in K$

Прикладу:

1) Нульове відображення

$0 = f: L \to "0"$ "0" - векторний простір нульової розмірності

$f(l) = 0$

2) $id: L \to L$

$f(l) = l$

3) $f: L \to K$ — базове поле, яке розглядається як одновимірний простір над собою

умова f - лінійний функціонал

V = простір многочленів від x степені $\leq d$

$\dim V = d+1$

базис: $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^d\}$

$\frac{d}{dx}$ – лінійне відображення?

$\frac{d}{dx} : V \to V$ – лінійне?

$\frac{d}{dx} : V \to V$ – лінійне?

$\frac{d}{dx}(p(x))$

перевірка для $\frac{d}{dx}$: ОК!

1) $\frac{d}{dx}(\alpha p(x)) = \alpha \frac{d}{dx}(p(x))$

2) $\frac{d}{dx}(p_1(x)+p_2(x)) = \frac{d}{dx}(p_1(x)) + \frac{d}{dx}(p_2(x))$

$\frac{d}{dx}$ – лінійне відображення

$p(x) \mapsto \left(\frac{d}{dx}\right)^d \left((p(x))^2\right)$

1) не виконується

2) не викон.

$p(x) \longmapsto \frac{d^3}{dx^3}(p(x))$ лін. оператор

$p(x) \longmapsto x\,p(x)$

1) $\alpha p(x) \longmapsto x(\alpha p(x)) = \alpha\cdot(x\cdot(p(x)))$

2) $p_1 + p_2 \longmapsto x(p_1 + p_2) = xp_1 + xp_2$

множення на x може виводити з простору многочленів степені $\leq d$

$x\frac{d}{dx}: p(x) \to x p'(x)$

Чи є оператор $x\frac{d}{dx}$ лінійним оператором?

1) $x\frac{d}{dx}(\alpha p(x)) = \alpha\, x\frac{d}{dx} p(x)$

2) $x\frac{d}{dx}(p_1(x) + p_2(x)) =$
$= xp_1' + xp_2'$

оператор координати

оператор імпульсу

$\left(\frac{d}{dx}\circ x\right)(p(x)) \neq x\circ\frac{d}{dx}(p(x))$

множення на x і дія похідної $\frac{d}{dx}$ не комутують

В кв. механіці відповідає принципу невизн. Гайзенберга

Нехай f - лінійне відображення

$$f: L \to M$$

Як задати відображення?

Нехай $\langle l_1, \dots, l_n \rangle = L$

позначення лінійної оболонки

Лінійна оболонка системи векторів $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$

((Векторний підпростір всіх лінійних комбінацій $l_1, l_2, \dots, l_n$

Якщо $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$

$f(l_k) = m_k$

- Чи існує f?

- Якщо існує чи однозначно задає відображення лінійне

Нехай існують два різних відображення

$$f(l_k) = m_k \qquad k = 1, \dots, n$$

$$f'(l_k) = m_k$$

$$g = f - f' \qquad g(l_k) = f(l_k) - f'(l_k) = m_k - m_k = 0$$

$$g(l_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$g(l) \overset{?}{=} 0 \qquad \forall\, l = a_1 l_1 + \dots + a_n l_n$$

$$\exists\, a_1, \dots, a_n$$

$$g(a_1 l_1 + \dots + a_n l_n) =$$

$$= a_1 \underbrace{g(l_1)}_{=0} + \dots + a_n \underbrace{g(l_n)}_{=0} = 0$$

$$f(l) = f'(l) \qquad \forall l$$

Якщо $\{l_1, \dots, l_n\}$ є базисом

тоді f точно існує

$$l = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i \leftarrow \text{однозначно}$$

$$f(l) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

f - є лінійним відображенням для якого $f(e_i) = m_i$

Ми довели що воно єдине.

Лінійні відображення однозначно задаються дією на базисні вектори

Дасть можливість записати лінійні відображення у вигляді матриць.

$\varphi: L \to M$

$\{e_i\}$ базис в L

$\{f_i\}$ базис в M

$\dim M = m$

$\dim L = n$

φ — лін. відображе

$\varphi \to$ матриця

$\varphi(e_1)$ розкласти по базису простору M

коорд. $\varphi(e_1)$ → перший стовпчик матриці

$\varphi(e_2)$ ⇝ другий стовпчик матриці

Д/З

$\frac{d}{dx}$ ⇝ матрицю оператора $\frac{d}{dx}$ в базисі $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Вектору l в просторі з базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$l = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_1) = \varphi_{11} f_1 + \dots + \varphi_{m1} f_m$$

$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = \varphi_{1n} f_1 + \dots + \varphi_{mn} f_m$$

$$\varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ & \dots & \\ \varphi_{m1} & & \varphi_{mn} \end{pmatrix}$$