Система однорідних лінійних рівнянь

- Завжди сумісна (існує тривіальний розв'язок)

— Якщо в цій системі менше рівнянь ніх невідомих

Наприклад: 3 рівн. 5 невідомих

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приклад:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_4 + 7x_5 \\ x_2 = 2x_4 - 4x_5 \\ x_3 = x_5 \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків параметризуються двома незалежними параметрами x_4 та x_5

Якщо система однорідних лін. рівнянь з n змінними $n > m$ → безліч розв'язків параметризованих як $(n-m)$ незалежними параметрами

Зафіксуємо систему лін. однор. рівнянь

Додавання розв'язків

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$+ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$((x_1+y_1), (x_2+y_2), \ldots, x_n+y_n)$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$
$+ \; a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots \; a_ny_n = 0$

$a_1(x_1+y_1) + \ldots + a_n(x_n+y_n) = 0$

$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

$\downarrow$

Лінійні форми
лінійні функціонали

f - лінійний функціонал

$\sim f : \underbrace{L}_{\text{векторний простір}} \to \underbrace{K}_{\mathbb{R}, \mathbb{C}}$

якщо
- $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$ $\quad \forall l_1, l_2$
- $f(al) = af(l)$ $\quad \forall l, a$

Приклади лін. функціоналів.

$\mathbb{R}^n$ $(x_1, \dots x_n)$

$f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ ← лін. ф.

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2$ ← не є функц.

$f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ ← лін. функц.

$f_{a_1,\dots,a_n}: (x_1, \dots, x_n)$ для фікс. $a_1 \dots a_n$

$P(x)$, $\deg P \le n$

$\frac{x+1}{x+2}$ – раціон. ф-ія

$P(x) \mapsto P(0)$ – лін. ф-л

$p(x) = p_nx^n + \dots + p_1x + p_0$

$P(0) = p_0$

$Q(x) = q_nx^n + \dots + q_0$

$Q(0) = q_0$

$(P(x) + Q(x))|_{x=0} = p_0 + q_0$

$P(x) \mapsto P(1)$ – так

$P(x) \mapsto (P^2(x))|_{x=0}$ – ні $\to \{p_0^2\}$

$P(x) \mapsto (P'(x))|_{x=1}$ –

$P(x) \mapsto \int_0^1 P(x)dx$ – так

$= \frac{p_n}{n+1} + \frac{p_{n-1}}{n} + \dots \frac{p_1}{2} + \frac{p_0}{1}$

$P(x) \mapsto (P'(x))|_{x=0} = p_1$

$((aP(x))')_{x=0} = (aP'(x))|_{x=0}$

$= aP'(x)|_{x=0}$

$(P'(x))|_{x=1} = \underbrace{n}p_n + \underbrace{(n-1)}\underbrace{p_{n-1}} + \dots + \underbrace{p_1}$

L, над L є лінійні функціонали

лінійні функціонали
можна
- додавати
- множити на скаляр

f_1, f_2 - лінійні ф-ли

$$(f_1+f_2)(l) := f_1(l) + f_2(l)$$

$$(\alpha f)(l) := \alpha(f(l))$$

f_1+f_2, αf - лінійні ф-ли

$f = f_1+f_2 \overset{?}{-}$ лін. ф-л

$$f(l_1+l_2) = (f_1+f_2)(l_1+l_2) \overset{def}{=} f_1(l_1+l_2) + f_2(l_1+l_2)$$

$$= f_1(l_1) + f_1(l_2) + f_2(l_1) + f_2(l_2)$$

$$= (f_1+f_2)(l_1) + (f_1+f_2)(l_2)$$

$$= f(l_1) + f(l_2)$$

$$f(\alpha l) \overset{?}{=} \alpha \cdot f(l)$$

$$(\alpha f)(l) \overset{def}{=} \alpha \cdot f(l)$$

Множина всіх лін. функціоналів на вект. просторі L утворюють векторний простір

нульовий ф-л
$0(l) = 0$

Дуальний простір до L

простір лін. функц L^*

Як задати лінійний функціонал?

L, $\underbrace{\{e_i\}\text{ - базис в } L}$

$$l = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

лін. ф-л — для будь-якого вектора l

$f(l)$ - ?

$$f(l) = a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \ldots + a_n f(e_n)$$

Щоб задати ф-л достатньо задати його на базисних векторах а далі лінійно продовжити на весь простір L

Достатньо задати $f(e_1), \underbrace{f(e_2)}_{f_2}, \ldots, \underbrace{f(e_n)}_{f_n}$, $f(e_1) = f_1$

координати функціоналу

$$f \mapsto (f_1, \ldots, f_n) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

$$g \mapsto (g_1, \ldots, g_n) = (g(e_1), \ldots, g(e_n))$$

$$(f+g) \mapsto (f_1+g_1, \ldots, f_n+g_n) = ((f+g)(e_1), \ldots, (f+g)(e_n))$$

$$(af) \mapsto (af_1, \ldots, af_n)$$

Базис в L^* - !

Базис в L^*, $\dim L^* = n$, дуальний базис $\leadsto$
$$\begin{cases} e^1 \mapsto (1, 0, \ldots, 0) \\ e^2 \mapsto (0, 1, 0 \ldots 0) \\ \vdots \\ e^n \mapsto (0, 0, \ldots 0, 1) \end{cases}$$

символ Кронекера

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$e^1(e_2) = 0$$

$$e^1(e_1) = 1$$

$L = \{P(x) \mid \deg P \le n\}$ $\quad \dim L = n+1$

1. $e_0 = 1,\ e_1 = x, \dots, e_n = x^n$ – базис

Що є базисом в L^* дуальним лінійні ф-али $e^i(e_j) = \delta^i_j$

Можна використати похідні многочлена в точці

2. $a_1 \ne a_2 \ne a_3 \ne \dots \ne a_{n+1}$ попарно різні

Є лінійні ф-ли

$$e^i(P) := P(a_i)$$

знайти дуальний базис до e^i

Знайти базис $\{e_i\}$ в просторі многочленів, дуальний до якого є базис e^i

Можна почати з $n = 0, 1, 2, \dots$ точок