Практичне заняття 9: Слабка збіжність в нормованих лінійних просторах.

Нехай X—нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Послідовність $\{x_n | n\geq 1\}$ елементів простору X називають слабко збіжною до елемента $x_0\in X$, якщо $f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$ для довільного функціонала $f\in X'$. Це позначають так: $x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$.

Задача 1 Довести, що із сильної збіжності випливає слабка збіжність, тобто, якщо $x_n\to x_0, n\to\infty$, то $x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$.

ст.1

Р-ок Розглянемо довільний функціонал $f\in X'$. Оскільки f неперервний і $x_n\to x_0, n\to\infty$, то $f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$. Тому $x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$. ⌋

Задача 2 (Критерій слабкої збіжності). Нехай X—нормований лінійний простір, $\{x_n | n\geq 1\}$—послідовність елементів простору X, $x_0\in X$. Для того, щоб $x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$ необхідно і достатньо, щоб виконувались такі дві умови:

а) $\{x_n | n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1\ \|x_n\|\leq C$;

в) існує M—тотальна множина в X', така, що для $\forall f\in M: f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$.

Р-ок Нехай спочатку $x_n \xrightarrow{w} x_0, n\to\infty$. Доведемо, що виконуються умови а) і в). Позначимо $e: X\to X''$ канонічне вкладення, тобто $e_x(f)=f(x), f\in X', x\in X$. Нагадаємо, що відображення e лінійне і ізометричне.

Маємо: $e_{x_n}: X'\to\mathbb{K}, n\geq 1$ і для довільного $f\in X'$
$e_{x_n}(f)=f(x_n)\to f(x_0), n\to\infty$, а тому послідовність $\{e_{x_n}(f) | n\geq 1\}$ обмежена. Оскільки простір X' банахів, то ми можемо застосувати теорему Банаха-Штейнгауза (принцип рівномірної обмеженості). Із цієї теореми випливає, що $\{\|e_{x_n}\| \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1\ \|e_{x_n}\|\leq C$. Але $\|e_{x_n}\|=\|x_n\|, n\geq 1 \Rightarrow$ $\forall n\geq 1\ \|x_n\|\leq C \Rightarrow$ Умова а) виконується. Умова в) також виконується із множиною $M=X'$.

Нехай тепер виконуються умови а) і в). Нам потрібно довести, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$. Умова а) $\Rightarrow \exists C>0: \forall n \geq 1$ $\|x_n\| \leq C$. Нам потрібно довести, що

$$f(x_n) \to f(x_0),\ n \to \infty \quad (*)$$

для довільного функціонала $f \in X'$. Умова в) $\Rightarrow (*)$ виконується для $\forall f \in M$. Доведемо $(*)$ для довільного $f \in$ л.о.(M) (лінійної оболонки M). Розглянемо довільний $f \in$ л.о.$(M) \Rightarrow f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$ для деяких елементів $f_1, \ldots, f_m \in M$ і деяких скалярів $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_1 f_1(x_n) + \ldots + \alpha_m f_m(x_n)) =$$

ст 2

$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) + \ldots + \alpha_m \lim_{n\to\infty} f_m(x_n) =$$

$$= \alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \ldots + \alpha_m f_m(x_0) = f(x_0).$$

Таким чином, ми довели $(*)$ для $\forall f \in$ л.о.(M). Тепер ми готові довести $(*)$ для довільного $f \in X'$. Розглянемо довільний $f \in X'$ і доведемо, що $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$. Доводимо це за означенням границі послідовності. Розглянемо $\forall \varepsilon > 0$. Тоді нам треба показати, що $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Оцінимо $|f(x_n) - f(x_0)|$. Для довільного $g \in$ л.о.(M) маємо: $|f(x_n) - f(x_0)| =$

$$= |f(x_n) - g(x_n) + g(x_n) - g(x_0) + g(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| =$$

$$= |(f-g)(x_n)| + |g(x_n) - g(x_0)| + |(g-f)(x_0)| \leq$$

$$\leq \|f-g\| \cdot \|x_n\| + |g(x_n) - g(x_0)| + \|g-f\| \cdot \|x_0\| \leq$$

$$\leq \|f-g\| \cdot C + |g(x_n) - g(x_0)| + \|f-g\| \cdot \|x_0\| =$$

$$= (C + \|x_0\|)\|f-g\| + |g(x_n) - g(x_0)|.$$

Ми хочемо, щоб $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ця нерівність буде виконуватись, якщо

$$\begin{cases} (C+\|x_0\|)\|f-g\| < \varepsilon/2 \\ |g(x_n) - g(x_0)| < \varepsilon/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|f-g\| < \dfrac{\varepsilon}{2(C+\|x_0\|)} \\ |g(x_n) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Далі все просто. Оскільки множина M тотальна в X', то л.о.(M) щільна в $X' \Rightarrow \exists g \in$ л.о.(M) такий, що $\|f-g\| < \dfrac{\varepsilon}{2(C+\|x_0\|)}$. Зафіксуємо такий функціонал g.

Оскільки $g \in л.о(M)$, то за доведеним вище $g(x_n) \to g(x_0)$, $n \to \infty \Rightarrow$ для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $|g(x_n) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для $\forall n \geq N$: $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$
Отже, ми довели, що $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$.
Таким чином, (*) виконується для довільного $f \in X' \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$.]

ст.3

Слабка збіжність в l_p.

Задача 3 (Необхідна умова слабкої збіжності в просторі l_p, $1 \leq p \leq +\infty$) Нехай $p \in [1; \infty]$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots) \in l_p$, $n \geq 1$ і $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots) \in l_p$.
Нехай $x^{(n)} \xrightarrow{w} x^{(0)}$, $n \to \infty$. Довести, що для довільного $k \geq 1$ $x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}$, $n \to \infty$.

Р-ок Розглянемо довільне $k \geq 1$. Визначимо функціонал $f_k : l_p \to \mathbb{K}$ рівністю $f_k(x) = x_k$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_p$. Очевидно, що $f_k \in l_p'$. Оскільки $x^{(n)} \xrightarrow{w} x^{(0)}$, $n \to \infty$, то
$f_k(x^{(n)}) \to f_k(x^{(0)})$, $n \to \infty \Rightarrow x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}$, $n \to \infty$]

Задача 4 (Критерій слабкої збіжності в l_p, $p \in (1, +\infty)$).
Нехай $p \in (1, +\infty)$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots) \in l_p$, $n \geq 1$ і $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots) \in l_p$. Довести, що $x^{(n)} \xrightarrow{w} x^{(0)}$, $n \to \infty$ в l_p тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

а) $\{x^{(n)} \mid n \geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C > 0$: $\forall n \geq 1$: $\|x^{(n)}\| \leq C$;

в) для довільного $k \geq 1$ $x_k^{(n)} \to x_k^{(0)}$, $n \to \infty$.

Р-ок Див. розділ 5, розв'язок задачі 1 (ст. 64) в [ФА1]: Збірник задач з функціонального аналізу. Частина I / Укладачі О.Ю. Константінов, Ю.С. Мішура, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 123 с.]

Задача 5* (Критерій слабкої збіжності в l_1 — теорема Шура). Нехай $x^{(n)} \in l_1$, $n \geq 1$ і $x^{(0)} \in l_1$. Довести, що $x^{(n)} \xrightarrow{w} x^{(0)}$, $n \to \infty$ в $l_1 \Leftrightarrow x^{(n)} \to x^{(0)}$, $n \to \infty$ в l_1.

Р-ок: Домашнє завдання.

Задача 6 Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність в НЛП X, для збіжних послідовностей знайти границі:

а) $X = l_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, $x^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{n\text{-те місце}}, 0, 0, \ldots)$, $n \geq 1$.

ст. 4

Р-ок: Див. розділ 5, задача 3, пункт 1 в [ФА 1].

в) $X = l_p$, $1 \leq p < +\infty$, $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, $n \geq 1$

Р-ок: Див. розділ 5, задача 3, пункт 2 в [ФА 1]

с) $X = l_p$, $1 < p < +\infty$, $x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, $n \geq 1$

Р-ок. 1крок. Дослідимо $\{x^{(n)} | n \geq 1\}$ на покоординатну збіжність. Розглянемо довільне $k \geq 1$. Оскільки $x_k^{(n)} = 0$ при $n \geq k$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^{(n)} = 0$. Таким чином, дана послідовність збігається покоординатно до $0 = (0, 0, 0, \ldots)$. Тому 0 є єдиним „претендентом" на слабку і сильну границю даної послідовності.

2крок Перевіримо, чи збігається $x^{(n)}$ до 0, $n \to \infty$.

Маємо: $\|x^{(n)} - 0\| = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p}\right)^{1/p} = C > 0$, тому $\|x^{(n)}\| \not\to 0$, $n \to \infty$.

Отже, $\{x^{(n)} | n \geq 1\}$ не збігається в l_p.

3крок. Перевіримо, чи збігається $x^{(n)}$ до 0 слабко при $n \to \infty$. Для цього використаємо критерій слабкої збіжності в l_p, $1 < p < +\infty$ (див. задачу 4).

Умова а) виконується, бо $\|x^{(n)}\| = C$, $n \geq 1$.

Умова в) також виконується, бо вище ми показали, що дана послідовність збігається покоординатно до 0. Отже, $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$.

Висновок $\{x^{(n)} | n \geq 1\}$ розбігається в l_p, і $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в l_p.

Слабка збіжність в L_p

Задача 7 (Критерій слабкої збіжності в $L_p[a,b]$, $1<p<+\infty$)
Нехай $1<p<+\infty$. Довести, що послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів простору $L_p[a,b]$ слабко збіжна до елемента $x_0 \in L_p[a,b]$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) $\{x_n \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1 \ \|x_n\|_p \leq C$;
в) для довільного $\tau \in (a,b]$: $\int_a^\tau x_n(t)dt \to \int_a^\tau x_0(t)dt$, $n\to\infty$.

Р-ок: Домашнє завдання.

Задача 8 (Критерій слабкої збіжності в $L_p[a,+\infty)$, $1<p<+\infty$)
Нехай $1<p<+\infty$. Довести, що послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів простору $L_p[a,+\infty)$ слабко збіжна до елемента $x_0 \in L_p[a,+\infty)$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) $\{x_n \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1: \|x_n\|_p \leq C$;
в) для довільного $\tau \in (a,+\infty)$: $\int_a^\tau x_n(t)dt \to \int_a^\tau x_0(t)dt$, $n\to\infty$.

Р-ок: Домашнє завдання.

Задача 9 (Критерій слабкої збіжності в $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<+\infty$).
Нехай $1<p<+\infty$. Довести, що послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів простору $L_p(\mathbb{R})$ слабко збіжна до елемента $x_0 \in L_p(\mathbb{R})$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) $\{x_n \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1: \|x_n\|_p \leq C$;
в) для довільного $\tau \in \mathbb{R}$: $\int_0^\tau x_n(t)dt \to \int_0^\tau x_0(t)dt$, $n\to\infty$.

Р-ок: Домашнє завдання.

Задача 10 Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність в НЛП X, для збіжних послідовностей знайти границі:

а) $X=L_p[0,1]$, $1\leq p\leq+\infty$, $x_n(t)=\begin{cases} n, & t\in[0,\frac{1}{n^2}] \\ 0, & t\in(\frac{1}{n^2},1]\end{cases}$, $n\geq 1$.

Р-ок: Див. розділ 5, задача 3, пункт 3 в [ФА1].

в) $X=L_p[0,1]$, $1<p<+\infty$, $x_n(t)=\sin(\pi n t)$, $t\in[0,1]$, $n\geq 1$.

Р-ок: Див. розділ 5, задача 3, пункт 4 в [ФА1].

c) $X = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} I_{[n,2n]}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$, де I_M — індикаторна функція множини M.

Р-ок. Дослідимо дану послідовність на збіжність майже скрізь. Розглянемо $\forall t \in \mathbb{R}$. Тоді існує натуральне число $N > t \Rightarrow x_n(t) = 0$ для $\forall n \ge N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$. Тепер розглянемо $\|x_n - 0\|_p = \|x_n\|_p$

Якщо $p = +\infty$, то $\|x_n\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |x_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, $n \to \infty$

Тому $x_n \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$.

Нехай тепер $1 \le p < +\infty$. Тоді $\|x_n\|_p = \|\frac{1}{\sqrt{n}} I_{[n,2n]}\|_p =$
$= \frac{1}{\sqrt{n}} \|I_{[n,2n]}\|_p = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_{\mathbb{R}} |I_{[n,2n]}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_n^{2n} 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}} n^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$

Тепер розглянемо кілька випадків для індекса p

1 випадок: $p \in [1, 2) \Rightarrow p < 2 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \Rightarrow \|x_n\|_p \to +\infty$, $n \to \infty$

Звідси випливає, що $\{x_n | n \ge 1\}$ не збігається слабко (це випливає із критерія слабкої збіжності — див. задачу 2) і не збігається сильно.

2 випадок $p \in (2, +\infty) \Rightarrow p > 2 \Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{2} \Rightarrow \|x_n\|_p \to 0$, $n \to \infty$

Тому $x_n \to 0$, $n \to \infty$ в $L_p(\mathbb{R}) \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $L_p(\mathbb{R})$.

3 випадок $p = 2$. Тоді $\|x_n\|_2 = 1$, $n \ge 1$. Тому $x_n \not\to 0$, $n \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \{x_n | n \ge 1\}$ взагалі не збігається в $L_2(\mathbb{R})$ (щоб акуратно це довести, використайте задачу 2, пункт 3 із розділу 1 із [ФА1]). Нам залишилось дослідити $\{x_n | n \ge 1\}$ на слабку збіжність. Доведемо, що $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Перший спосіб Скористаємось критерієм слабкої збіжності в $L_2(\mathbb{R})$ (задача 9). Умова а) виконана, бо $\|x_n\|_2 = 1$, $n \ge 1$. Перевіримо умову в). Розглянемо $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Існує натуральне число $N > \tau$, а тоді при $n \ge N$ $\int_0^\tau x_n(t)dt = \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{n}} I_{[n,2n]}(t)dt = \int_0^\tau 0 dt = 0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\tau x_n(t)dt = 0 = \int_0^\tau 0 dt$. Отже, умова в) виконана, а тому $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Другий спосіб Доведемо, що $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R})$ за означенням слабкої збіжності. Розглянемо довільний функціонал $f\in(L_2(\mathbb{R}))'$. Тоді нам треба довести, що $f(x_n)\to 0,\ n\to\infty$. Спряжений простір до $L_2(\mathbb{R})$ — $(L_2(\mathbb{R}))'$ можна ототожнити з $L_2(\mathbb{R})$ (бо міра Лебега на $\mathbb{R}$ σ-скінченна і $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$). Тому для функціонала $f\in(L_2(\mathbb{R}))'$ існує елемент $a\in L_2(\mathbb{R})$, такий, що $f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} a(t)x(t)dt,\ x\in L_2(\mathbb{R})$. Маємо: $|f(x_n)|=$

$$=\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}I_{[n,2n]}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\left|f(I_{[n,2n]})\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} a(t)I_{[n,2n]}(t)dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int\limits_n^{2n} a(t)dt\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_n^{2n}|a(t)|dt=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_n^{2n}|1\cdot a(t)|dt\le$$

| використовуємо нерівність Гельдера із $p=2, q=2$ | $\displaystyle\le\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int\limits_n^{2n}|1|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_n^{2n}|a(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\,n^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_n^{2n}|a(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int\limits_n^{2n}|a(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow 0,\ n\to\infty$$

(останню границю легко довести, записавши $\int\limits_n^{2n}|a(t)|^2dt=\int\limits_{\mathbb{R}}|a(t)|^2\cdot I_{[n,2n]}(t)dt$ і використавши теорему Лебега про мажоровану збіжність).

Таким чином, $f(x_n)\to 0,\ n\to\infty$, а тому $x_n\xrightarrow{w}0,\ n\to\infty$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Відповідь: якщо $p\in[1,2)$, то $\{x_n|n\ge 1\}$ не збігається ні слабко, ні сильно в $L_p(\mathbb{R})$; якщо $p=2$, то $\{x_n|n\ge 1\}$ не збігається в $L_2(\mathbb{R})$, і $x_n\xrightarrow{w}0,\ n\to\infty$ в $L_2(\mathbb{R})$; якщо $p>2$, то $x_n\to 0,\ n\to\infty$ в $L_p(\mathbb{R})$ і $x_n\xrightarrow{w}0,\ n\to\infty$ в $L_p(\mathbb{R})$.

Слабка збіжність в $C(Q)$

При розгляді просторів неперервних функцій будемо, для спрощення, вважати, що базове поле $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Таким чином, $C(Q)$ — простір дійснозначних неперервних на Q функцій $x:Q\to\mathbb{R}$; тут Q — метричний компакт.

Задача 11 (Критерій слабкої збіжності в $C(Q)$). Нехай Q — метричний компакт, $\{x_n | n \geq 1\}$ — послідовність елементів $C(Q)$, $x_0 \in C(Q)$. Довести, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$ в $C(Q)$ тоді й тільки тоді, коли виконані наступні дві умови:

а) $\{x_n | n \geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 : \|x_n\| \leq C$;

в) для довільної точки $t \in Q$ $x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$.

Р-ок Нехай спочатку $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$ в $C(Q)$. Доведемо, що виконані умови а) і в). Умова а) випливає із критерія слабкої збіжності (див. задачу 2). Перевіримо умову в). Розглянемо довільну точку $t \in Q$. Визначимо функціонал $f : C(Q) \to \mathbb{R}$ рівністю $f(x) = x(t)$, $x \in C(Q)$. Очевидно, $f \in (C(Q))'$. Оскільки $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$, то $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$, тобто $x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$. Отже, умова в) виконується.

ст. 8

Нехай тепер виконані умови а) і в). Доведемо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$ в $C(Q)$. Розглянемо довільний функціонал $f \in (C(Q))'$. За теоремою Маркова існує заряд ω на $\mathcal{B}(Q)$ (тут $\mathcal{B}(Q)$ — борелева σ-алгебра підмножин Q; заряд ω приймає лише скінченні значення), такий, що $f(x) = \int_Q x(t)\,d\omega(t)$, $x \in C(Q)$. Позначимо ω_+ додатню варіацію заряда ω, ω_- — від'ємну варіацію заряда ω. Тоді ω_+ і ω_- — скінченні міри на $\mathcal{B}(Q)$, і $\omega = \omega_+ - \omega_-$. Для довільного $x \in C(Q)$ маємо: $f(x) = \int_Q x(t)\,d\omega(t) = \int_Q x(t)\,d\omega_+(t) - \int_Q x(t)\,d\omega_-(t)$. Тому $f(x_n) = \int_Q x_n(t)\,d\omega_+(t) - \int_Q x_n(t)\,d\omega_-(t) \longrightarrow \int_Q x_0(t)\,d\omega_+(t) - \int_Q x_0(t)\,d\omega_-(t) = f(x_0)$, $n \to \infty$, тут ми використали теорему Лебега про мажоровану збіжність. Отже, $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$. Оскільки функціонал $f \in (C(Q))'$ довільний, то $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$ в $C(Q)$. ⌋

Задача 12 Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність в НЛП X, для збіжних послідовностей знайти границі:

а) $X=C[0,1]$, $x_n(t)=t^n$, $t\in[0,1]$, $n\geq 1$

Р-ок. Т. із слабкої, і із сильної збіжності в $C[0,1]$ випливає поточкова збіжність. Тому поточкова границя, якщо вона існує, — це єдиний „претендент" на слабку і сильну границі.

Знаходимо поточкову границю

ст 9

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=\lim_{n\to\infty} t^n=\begin{cases}0, & t\in[0,1)\\ 1, & t=1\end{cases} =: x_0(t).$$

Але $x_0\notin C[0,1] \Rightarrow$ дана послідовність не збігається ні слабко, ні сильно в $C[0,1]$.

Відповідь: дана послідовність не збігається ні слабко, ні сильно в $C[0,1]$.

в) $X=C[0,1]$, $x_n(t)=t^n-t^{2n}$, $t\in[0,1]$, $n\geq 1$.

Р-ок: 1крок: Знаходимо поточкову границю

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=\lim_{n\to\infty}(t^n-t^{2n})=\begin{cases}0-0, & t\in[0,1)\\ 1-1, & t=1\end{cases}=0,\ t\in[0,1].$$

Отже, нульова функція — це єдиний „претендент" на слабку і сильну границі.

2крок Дослідимо $\{x_n|n\geq 1\}$ на сильну збіжність в $C[0,1]$. Маємо: $\|x_n-0\|=\|x_n\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x_n(t)|=$

$$=\max_{t\in[0,1]}|t^n-t^{2n}|=\max_{t\in[0,1]}(t^n-t^{2n})=$$

Зробимо заміну змінної $u=t^n$. Коли t пробігає відрізок $[0,1]$, то u теж пробігає відрізок $[0,1]$

$$=\max_{u\in[0,1]}(u-u^2)=\frac{1}{4}.$$

Отже, $\|x_n\|=\frac{1}{4}\not\to 0,\ n\to\infty \Rightarrow x_n\not\to 0,\ n\to\infty$ в $C[0,1] \Rightarrow \{x_n|n\geq 1\}$ не збігається в $C[0,1]$.

3крок Дослідимо $\{x_n|n\geq 1\}$ на слабку збіжність в $C[0,1]$. Для цього скористаємось критерієм слабкої збіжності в $C[0,1]$ (задача 11); у нас $x_0(t)=0,\ t\in[0,1]$

Умова a) виконується, бо $\|x_n\| = \frac{1}{4}$, $n \geq 1$. Умова в) також виконується, бо для $\forall t \in [0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$. Отже, $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $C[0,1]$.

Відповідь: $\{x_n \mid n \geq 1\}$ розбігається в $C[0,1]$, і $x_n \xrightarrow{w} 0$, $n \to \infty$ в $C[0,1]$.

c) $X = C[0,1]$, $x_n(t) = \dfrac{nt^2}{1+n^2t^4}$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$.

Р-ок: Див. розділ 5, задача 3, пункт 5 в [ФА1].

Домашнє завдання

1. Задачі 5, 7, 8, 9
2. [ФА1]: розділ 5, задача 10, пункти: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 18, 19.
3. [ФА1]: розділ 5, задача 11, пункти: 1, 2, 3, 4, 7.