Практичне заняття 8: Неперервні лінійні функціонали в просторах L_p і C.

Задача 1 Нехай X – нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X\to\mathbb{K}$. Перевірити, що f коректно визначений, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f – неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$.

а) $X=L_1[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\int\limits_0^{\pi/2} x(t)\sin t\,dt$, $x\in L_1[0,\frac{\pi}{2}]$.

Р-ок: Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x\in L_1[0,\frac{\pi}{2}]$, то $\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)\sin t|dt=\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)|\cdot|\sin t|dt\le\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)|dt<+\infty$, тому $\int\limits_0^{\pi/2}x(t)\sin t\,dt$ існує і належить $\mathbb{K}$. Це і означає, що f коректно визначений.

Функціонал f є лінійним. Дійсно, для $\forall x,y\in L_1[0,\frac{\pi}{2}]$ і $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ маємо: $f(\alpha x+\beta y)=\int\limits_0^{\pi/2}(\alpha x+\beta y)(t)\sin t\,dt=$

$=\int\limits_0^{\pi/2}(\alpha x(t)+\beta y(t))\sin t\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}(\alpha x(t)\sin t+\beta y(t)\sin t)dt=\Big|$ використовуємо лінійність інтеграла Лебега $\Big|=\alpha\int\limits_0^{\pi/2}x(t)\sin t\,dt+\beta\int\limits_0^{\pi/2}y(t)\sin t\,dt=$

ст. 1

$=\alpha f(x)+\beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in L_1[0,\frac{\pi}{2}]$ маємо: $|f(x)|=\left|\int\limits_0^{\pi/2}x(t)\sin t\,dt\right|\le\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)\sin t|dt=$

$=\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)|\cdot|\sin t|dt\le\int\limits_0^{\pi/2}|x(t)|dt=\|x\|_1$ (норма x в $L_1[0,\frac{\pi}{2}]$).

Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)|\le\|x\|_1$, $x\in L_1[0,\frac{\pi}{2}]$, то $\|f\|\le 1$. З іншого боку, для числа $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$ розглянемо функцію $x_\varepsilon=I_{[\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}]}$ (літера I означає індикатор), тобто $x_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\\ 1, & t\in[\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$. Тоді $\|x_\varepsilon\|_1=\int\limits_0^{\pi/2}|x_\varepsilon(t)|dt=$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}0\,dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2}1\,dt=\varepsilon$ і $f(x_\varepsilon)=\int\limits_0^{\pi/2}x_\varepsilon(t)\sin t\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}0\cdot\sin t\,dt+$

$+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2}1\cdot\sin t\,dt=(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\sin\varepsilon$. Тому

$\|f\|=\sup\limits_{x\ne0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_1}\ge\frac{|f(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|_1}=\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ для $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$, а тому

$\|f\| \geq \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq 1$ і $\|f\| \geq 1 \Rightarrow \|f\| = 1$.

Висновок: $f \in (L_1[0, \frac{\pi}{2}])'$ і $\|f\| = 1$.

в) $X = L_2[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin t \, dt$, $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$.

Р-ок Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(t) \sin t| \, dt \leq$ | застосовуємо нерівність Гельдера із $p=2, q=2$ | $\leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, тому $\int_0^{\pi/2} x(t) \sin t \, dt$ існує і належить $\mathbb{K}$. Це і означає, що f коректно визначений.

ст2

Зауваження: Те, що f коректно визначений, також випливає із пункта а), бо $L_2[0, \frac{\pi}{2}] \subset L_1[0, \frac{\pi}{2}]$.

Функціонал f є лінійним. Доведення таке саме, як і в пункті а).

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$ маємо: $|f(x)| = \left|\int_0^{\pi/2} x(t) \sin t \, dt\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(t) \sin t| \, dt \leq$ $\leq \left(\int_0^{\pi/2} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} |\sin t|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2$. Обчислимо

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$ Тому $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|x\|_2$, $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|x\|_2$, $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$, то $\|f\| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. З іншого боку, розглянемо функцію $x_0(t) = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тоді $x_0 \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$ і $\|x_0\|_2 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Також $f(x_0) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{4}$.

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ і $\|f\| \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \|f\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Висновок: $f \in (L_2[0, \frac{\pi}{2}])'$ і $\|f\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) $X = L_\infty[0,\pi]$, $f(x) = \int_0^\pi x(t)\cos t\,dt$, $x \in L_\infty[0,\pi]$.

Р-ок. Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x \in L_\infty[0,\pi]$, то $\int_0^\pi |x(t)\cos t|\,dt = \int_0^\pi |x(t)|\cdot|\cos t|\,dt \leq$
$\leq \int_0^\pi \|x\|_\infty |\cos t|\,dt = \|x\|_\infty \cdot \int_0^\pi |\cos t|\,dt < +\infty$, тому $\int_0^\pi x(t)\cos t\,dt$ існує і належить $\mathbb{K}$. Це і означає, що f коректно визначений.

Функціонал f є лінійним. Дійсно, для $\forall x, y \in L_\infty[0,\pi]$ і $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ маємо: $f(\alpha x + \beta y) = \int_0^\pi (\alpha x + \beta y)(t)\cos t\,dt =$
$= \int_0^\pi (\alpha x(t) + \beta y(t))\cos t\,dt = \int_0^\pi (\alpha x(t)\cos t + \beta y(t)\cos t)\,dt =$
$= \alpha\int_0^\pi x(t)\cos t\,dt + \beta\int_0^\pi y(t)\cos t\,dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x \in L_\infty[0,\pi]$ маємо: $|f(x)| = |\int_0^\pi x(t)\cos t\,dt| \leq \int_0^\pi |x(t)\cos t|\,dt =$
$= \int_0^\pi |x(t)|\cdot|\cos t|\,dt \leq \int_0^\pi \|x\|_\infty |\cos t|\,dt = \|x\|_\infty \int_0^\pi |\cos t|\,dt$.

ст 3

Обчислимо $\int_0^\pi |\cos t|\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt - \int_{\pi/2}^\pi \cos t\,dt =$
$= \sin t\Big|_0^{\pi/2} - \sin t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 1+1 = 2$. Тому $|f(x)| \leq 2\|x\|_\infty$, $x \in L_\infty[0,\pi]$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \leq 2\|x\|_\infty$, $x \in L_\infty[0,\pi]$, то $\|f\| \leq 2$. З іншого боку, розглянемо функцію
$x_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$. Тоді $x_0 \in L_\infty[0,\pi]$ і $\|x_0\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,\pi]} |x_0(t)| =$
$= 1$. Також $f(x_0) = \int_0^\pi x_0(t)\cos t\,dt = \int_0^\pi |\cos t|\,dt = 2$.
Тому $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_\infty} = 2$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq 2$ і $\|f\| \geq 2 \Rightarrow \|f\| = 2$.

Висновок: $f \in (L_\infty[0,\pi])'$ і $\|f\| = 2$.

d) $X = L_2[0,2020]$, $f(x) = \int\limits_0^{2020} \sqrt{|x(t)|}\,dt$, $x \in L_2[0,2020]$

Р-ок: Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x \in L_2[0,2020]$, то

$$\int\limits_0^{2020} \sqrt{|x(t)|}\,dt \le \left| \begin{array}{l} \text{використаємо} \\ \text{нерівність} \\ a \le a^4+1,\ a \ge 0 \end{array} \right| \le \int\limits_0^{2020} \left(|x(t)|^2+1\right)dt = 2020 + \int\limits_0^{2020} |x(t)|^2\,dt < +\infty.$$

Функціонал f не є лінійним. Щоб акуратно це довести, розглянемо функцію $x(t) = 1$, $t \in [0,2020]$. Тоді $x \in L_2[0,2020]$ і $f(x) = \int\limits_0^{2020} 1\,dt = 2020$, $f(-x) = \int\limits_0^{2020} 1\,dt = 2020 \Rightarrow$ $f(-x) \ne -f(x) \Rightarrow f$ не є лінійним.

Функціонал f неперервний. Доведемо це. Розглянемо $\forall x_0 \in L_2[0,2020]$ і доведемо, що f неперервний в точці x_0. Для $\forall x \in L_2[0,2020]$ маємо: $|f(x) - f(x_0)| =$

$$= \left| \int\limits_0^{2020} \sqrt{|x(t)|}\,dt - \int\limits_0^{2020} \sqrt{|x_0(t)|}\,dt \right| = \left| \int\limits_0^{2020} \left(\sqrt{|x(t)|} - \sqrt{|x_0(t)|} \right) dt \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{2020} \Big| \sqrt{\underbrace{|x(t)|}_{a}} - \sqrt{\underbrace{|x_0(t)|}_{b}} \Big|\,dt \le \left| \begin{array}{l} \text{використаємо} \\ \text{нерівність} \\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \le \sqrt{|a-b|},\ a,b \ge 0 \end{array} \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{2020} \sqrt{\big| |x(t)| - |x_0(t)| \big|}\,dt \le \left| \begin{array}{l} \text{використаємо нерівність} \\ \big||a| - |b|\big| \le |a-b|,\ a,b \in \mathbb{K} \end{array} \right|$$

$$\le \int\limits_0^{2020} \sqrt{|x(t) - x_0(t)|}\,dt = \int\limits_0^{2020} \underbrace{\sqrt{|x(t) - x_0(t)|}}_{\varphi} \cdot \underbrace{1}_{\psi}\,dt \le$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{використаємо нерівність} \\ \text{Гельдера із } p=4,\ q=\frac{4}{3} \end{array} \right| \le \left(\int\limits_0^{2020} |\varphi|^4\,dt \right)^{1/4} \cdot \left(\int\limits_0^{2020} |\psi|^{4/3}\,dt \right)^{3/4} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2020} |x(t) - x_0(t)|^2\,dt \right)^{1/4} \cdot (2020)^{3/4} = (2020)^{3/4} \cdot \|x - x_0\|_2^{1/2}.$$

Таким чином, ми довели, що $|f(x) - f(x_0)| \le (2020)^{3/4} \cdot \sqrt{\|x - x_0\|_2}$ для всіх $x \in L_2[0,2020]$. Із цієї нерівності випливає, що $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0 \Rightarrow$ функціонал f неперервний в точці x_0. Оскільки точка $x_0 \in L_2[0,2020]$ довільна, то f неперервний.

Висновок: функціонал f не лінійний, але неперервний.

Задача 2 Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

а) $X = L_1[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} x(t)\sin t\,dt$, $x \in L_1[0, \frac{\pi}{2}]$.

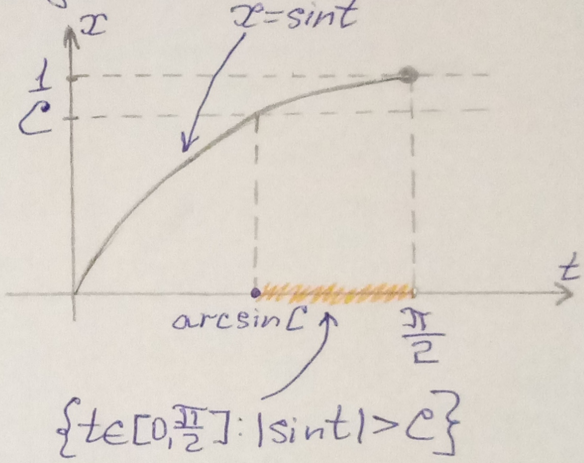
Р-ок Міра Лебега відрізка $[0, \frac{\pi}{2}]$: $\mu([0, \frac{\pi}{2}]) = \frac{\pi}{2} < +\infty$. Тому міра μ скінченна $\Rightarrow$ μ σ-скінченна $\Rightarrow$ простір $(L_1[0, \frac{\pi}{2}])'$ можна ототожнити з $L_\infty[0, \frac{\pi}{2}]$. Визначимо функцію $a(t) = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тоді:

① $a \in L_\infty[0, \frac{\pi}{2}]$ (бо $|\sin t| \le 1$ для всіх $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$) і $\|a\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\sin t| = 1$ (це випливає з того, що, по-перше, $|\sin t| \le 1$ для всіх $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, і, по-друге, якщо $C < 1$, то $\mu(\{t \in [0, \frac{\pi}{2}] : |\sin t| > C\}) > 0$ — див. рисунок)

② $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} a(t)x(t)\,dt$, $x \in L_1[0, \frac{\pi}{2}]$.

Тому $f \in (L_1[0, \frac{\pi}{2}])'$ і

$\|f\| = \|a\|_\infty = 1$.



в) $X = L_2[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} x(t)\sin t\,dt$, $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$

Р-ок. Простір $(L_2[0, \frac{\pi}{2}])'$ можна ототожнити з $L_2[0, \frac{\pi}{2}]$ (бо $\mu([0, \frac{\pi}{2}]) = \frac{\pi}{2} < +\infty$ і $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Означимо функцію $a(t) = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тоді

① $a \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$ і $\int\limits_0^{\pi/2} |\sin t|^2 dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \|a\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

② $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} a(t)x(t)\,dt$, $x \in L_2[0, \frac{\pi}{2}]$.

Тому $f \in (L_2[0, \frac{\pi}{2}])'$ і $\|f\| = \|a\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) $X=L_\infty[0,\pi]$, $f(x)=\int_0^\pi x(t)\cos t\,dt$, $x\in L_\infty[0,\pi]$.

Р-ок: Справедливе ізометричне вкладення: $L_1[0,\pi]\subset(L_\infty[0,\pi])'$. Означимо функцію $a(t)=\cos t$, $t\in[0,\pi]$.
Тоді ① $a\in L_1[0,\pi]$ і $\|a\|_1=\int_0^\pi|\cos t|dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt-\int_{\pi/2}^\pi\cos t\,dt=$
$=\sin t\Big|_0^{\pi/2}-\sin t\Big|_{\pi/2}^{\pi}=(1-0)-(0-1)=1+1=2$.

② $f(x)=\int_0^\pi a(t)x(t)dt$, $x\in L_\infty[0,\pi]$.

ст 6

Тому $f\in(L_\infty[0,\pi])'$ і $\|f\|=\|a\|_1=2$.

d) $X=L_{\frac{3}{2}}[0,2]$, $f(x)=\int_0^1 t\,x(t)dt-\int_1^2 x(t)dt$, $x\in L_{\frac{3}{2}}[0,2]$.

Р-ок. У нас індекс $p=\frac{3}{2}$. Визначимо спряжений індекс q: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{1}{q}=\frac{1}{3}$, $q=3$. Тому простір $(L_{\frac{3}{2}}[0,2])'$ можна ототожнити з $L_3[0,2]$. Означимо функцію $a:[0,2]\to\mathbb{R}$ так: $a(t)=\begin{cases}t, & t\in[0,1]\\ -1, & t\in(1,2]\end{cases}$. Тоді:

① $a\in L_3[0,2]$ і $\int_0^2|a(t)|^3dt=\int_0^1 t^3dt+\int_1^2 1dt=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\Rightarrow$
$\|a\|_3=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

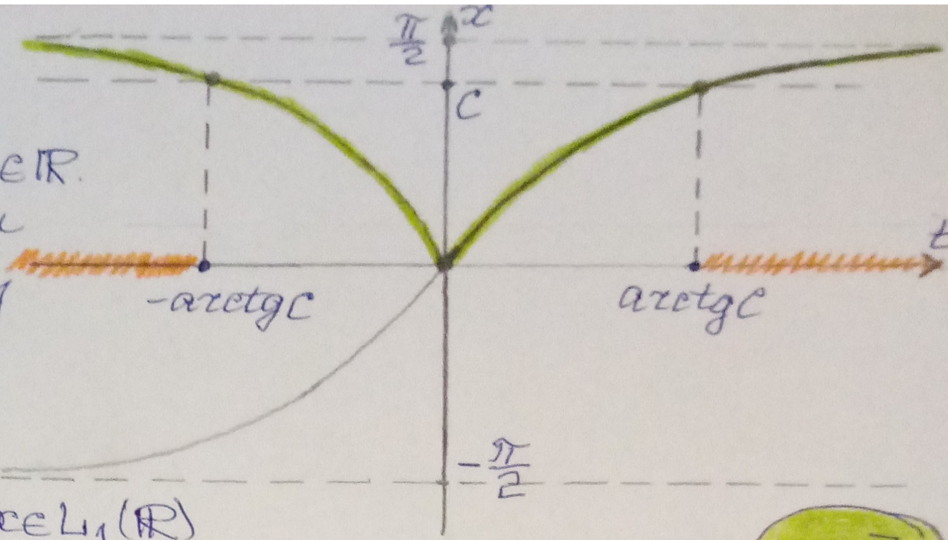
② $f(x)=\int_0^2 a(t)x(t)dt$, $x\in L_{\frac{3}{2}}[0,2]$.

Тому $f\in(L_{\frac{3}{2}}[0,2])'$ і $\|f\|=\|a\|_3=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

e) $X=L_1(\mathbb{R})$, $f(x)=\int_{\mathbb{R}}(\operatorname{arctg} t)x(t)dt$, $x\in L_1(\mathbb{R})$

Р-ок. У цій задачі міра μ не є скінченною, бо $\mu(\mathbb{R})=+\infty$; але міра μ σ-скінченна, бо $\mathbb{R}$ можна подати як $\bigcup_{n=1}^\infty[-n,n]$ і $\mu([-n,n])=2n<+\infty$, $n\geq1$. Індекс $p=1\Rightarrow$ спряжений індекс $q=\infty$. Тому простір $(L_1(\mathbb{R}))'$ можна ототожнити з $L_\infty(\mathbb{R})$. Означимо функцію $a(t)=\operatorname{arctg} t$, $t\in\mathbb{R}$. Тоді
① $a\in L_\infty(\mathbb{R})$ (бо $|\operatorname{arctg} t|\leq\frac{\pi}{2}$, $t\in\mathbb{R}$) і $\|a\|_\infty=$
$=\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|\operatorname{arctg} t|=\frac{\pi}{2}$ (це випливає із того, що, по-перше, $|\operatorname{arctg} t|\leq\frac{\pi}{2}$, $t\in\mathbb{R}$, і, по-друге, якщо $c<\frac{\pi}{2}$, то $\mu(\{t\in\mathbb{R}:|\operatorname{arctg} t|>c\})=+\infty>0$ - див. рисунок на наступній сторінці).

Зеленим кольором зображено графік функції $x=|\mathrm{arctg}\, t|, t\in\mathbb{R}$. Оранжевим кольором зображено множину $\{t\in\mathbb{R}: |\mathrm{arctg}\, t|>C\}$.



ст. 7

② $f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} a(t)x(t)dt$, $x\in L_1(\mathbb{R})$

Тому $f\in(L_1(\mathbb{R}))'$ і $\|f\|=\|a\|_\infty=\frac{\pi}{2}$.

f) $X=L_3[0,1]$, $f(x)=\int\limits_0^1 \frac{e^{it}x(t)}{\sqrt{t}}dt$, $x\in L_3[0,1]$.

Р-ок. У нас індекс $p=3$. Визначимо спряжений індекс q: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{1}{q}=\frac{2}{3}$, $q=\frac{3}{2}$. Тому простір $(L_3[0,1])'$ можна ототожнити із $L_{\frac{3}{2}}[0,1]$. Означимо функцію $a(t)=\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$, $t\in[0,1]$. Тоді

① $\int\limits_0^1 |a(t)|^{3/2}dt=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{3/2}dt=\int\limits_0^1 t^{-3/4}dt=4t^{1/4}\Big|_0^1=4$, а тому $a\in L_{\frac{3}{2}}[0,1]$ і $\|a\|_{\frac{3}{2}}=4^{2/3}=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$

② $f(x)=\int\limits_0^1 a(t)x(t)dt$, $x\in L_3[0,1]$.

Тому $f\in(L_3[0,1])'$ і $\|f\|=\|a\|_{\frac{3}{2}}=2\sqrt[3]{2}$.

Для розв'язання наступної задачі зробимо нагадування про функції обмеженої варіації і простір $(C[a,b])'$. Надалі, для спрощення, базове поле $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

1. Функції обмеженої варіації. Нехай $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$. Для розбиття $\lambda=\{a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b\}$ відрізка $[a,b]$ означимо величину $v(\alpha,\lambda):=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|\alpha(t_{k+1})-\alpha(t_k)|$. Варіацією функції α називається величина $V(\alpha;[a,b]):=\sup\{v(\alpha,\lambda)\,|\,\lambda$ — розбиття відрізка $[a,b]\}$. Зрозуміло, що $V(\alpha;[a,b])\in[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$. Якщо $V(\alpha;[a,b])<+\infty$, то функція α називається функцією обмеженої варіації на $[a,b]$. Множина всіх функцій обмеженої варіації на $[a,b]$ позначається $BV[a,b]$. Легко перевірити, що $BV[a,b]$ — лінійний простір і $V(\cdot;[a,b])$ — півнорма на $BV[a,b]$.

2. Геометричний зміст варіації. Число $V(\alpha;[a,b])$ дорівнює довжині шляху, що проходить проекція точки P на вісь Oy, коли точка P рухається по графіку функції α від точки $(a,\alpha(a))$ до $(b,\alpha(b))$; при цьому довжини стрибків теж враховуються

3. Нагадування про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Теорема 1 Нехай $\alpha\in BV[a,b]$ і виконані наступні умови:

а) Функція α неперервна в усіх точках відрізка $[a,b]$ за виключенням скінченної множини точок $\{c_1,\dots,c_m\}$, $m\geq 0$, які є точками розриву першого роду (тобто в цих точках існують ліва і права границі функції α).

ст 8

в) За винятком скінченного числа точок $t\in[a,b]$ існує $\alpha'(t)$, причому $\alpha'\in R[a,b]$ (α' інтегровна за Ріманом на $[a,b]$).

Тоді для довільної функції $x\in C[a,b]$ справедлива формула
$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)=\int_a^b x(t)\alpha'(t)\,dt+\sum_{k=1}^{m}x(c_k)\big(\alpha(c_k+)-\alpha(c_k-)\big),$$
де $\alpha(c_k+)=\lim\limits_{t\to c_k+}\alpha(t)$, $\alpha(c_k-)=\lim\limits_{t\to c_k-}\alpha(t)$;

$\alpha(a-):=\alpha(a)$, $\alpha(b+):=\alpha(b)$.

4. Нагадування про простір $(C[a,b])'$. Означимо множину $BV_0[a,b]=\{\alpha\in BV[a,b]:\alpha(a)=0$ і α неперервна справа на $(a,b)\}$. Легко перевірити, що простір $BV_0[a,b]$ лінійний. Введемо на цьому просторі норму:
$$\|\alpha\|_V=V(\alpha;[a,b]),\ \alpha\in BV_0[a,b].$$
Тоді $BV_0[a,b]$ — нормований лінійний простір.

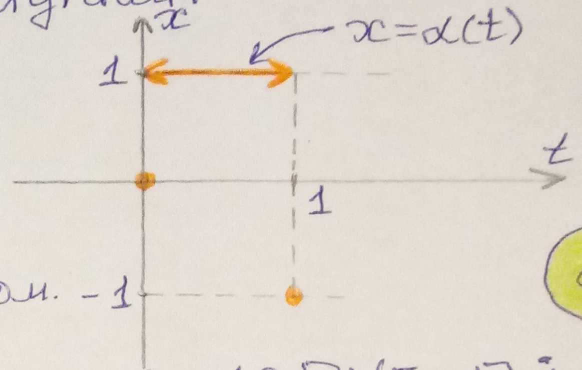
Теорема 2 (Ф. Рісса). Для довільного функціонала $f\in(C[a,b])'$ існує, причому єдина, функція $\alpha\in BV_0[a,b]$ така, що $f(x)=\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)$, $x\in C[a,b]$. Навпаки, для довільної функції $\alpha\in BV_0[a,b]$ формула
$$f(x)=\int_a^b x(t)\,d\alpha(t),\ x\in C[a,b]$$
визначає функціонал $f\in(C[a,b])'$. При цьому
$$\|f\|=\|\alpha\|_V.$$

Теорема Ф. Рісса показує, що простір $(C[a,b])'$ можна ототожнити із $BV_0[a,b]$.

Задача 3 Користуючись описом спряженого простору $(C[a,b])'$, довести, що наведені функціонали є неперервними лінійними функціоналами на $C[a,b]$ і знайти їх норми:

а) $f(x)=x(0)-2x(1)$, $x\in C[0,1]$.

Р-ок. Нам потрібно вибрати функцію $\alpha\in BV_0[0,1]$ так, щоб $f(x)=\int_0^1 x(t)d\alpha(t)$, $x\in C[0,1]$. Дивлячись на формулу для обчислення інтеграла Рімана-Стілтьеса із теореми 1, оберемо α наступним чином:



$$\alpha(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ 1, & t\in(0,1)\\ -1, & t=1.\end{cases}$$

Графік функції α зображено на рисунку оранжевим кольором.

ст. 9

Тоді маємо:

① $\alpha\in BV_0[0,1]$. Дійсно, по-перше $\alpha\in BV[0,1]$ і $V(\alpha;[0,1])=1+2=3$ (визначаємо, користуючись геометричним змістом варіації). По-друге, $\alpha(0)=0$. По-третє, α неперервна справа в кожній точці $t_0\in(0,1)$. Тому $\alpha\in BV_0[0,1]$.

② Покажемо, що $f(x)=\int_0^1 x(t)d\alpha(t)$, $x\in C[0,1]$. Для цього використаємо теорему 1 (про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьеса). Ми вже знаємо, що $\alpha\in BV[0,1]$. Залишається перевірити дві умови:

Умова а) Функція α неперервна в усіх точках $[0,1]$ за виключенням двох точок: $c_1=0$, $c_2=1$. В цих точках α має розриви першого роду. При цьому $\alpha(0-)=\alpha(0)=0$; $\alpha(0+)=1$, $\alpha(1-)=1$, $\alpha(1+)=\alpha(1)=-1$.

Умова б) $\alpha'(t)=0$ для $\forall t\in(0,1)$, в точках 0, 1 α' не існує. Така функція $\alpha'\in R[0,1]$ (α' можна довизначити довільним чином в т. 0, 1. Одержана функція буде обмеженою на $[0,1]$ і буде мати не більше двох точок розриву на $[0,1]$. Тому вона буде інтегровною за Ріманом на $[0,1]$.)

Отже, умови теореми 1 виконані $\Rightarrow$ для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $\int_0^1 x(t)d\alpha(t)=\int_0^1 x(t)\alpha'(t)dt+x(0)(\alpha(0+)-\alpha(0-))+$

$+x(1)(\alpha(1+)-\alpha(1-))=\int_0^1 x(t)\cdot 0dt+x(0)(1-0)+x(1)(-1-1)=$

$=x(0)-2x(1)=f(x)$. Отже, $f(x)=\int_0^1 x(t)d\alpha(t)$ для довільної функції $x\in C[0,1]$.

<u>Висновок:</u> за теоремою 2 $f\in (C[0,1])'$ і $\|f\|=\|\alpha\|_V=$

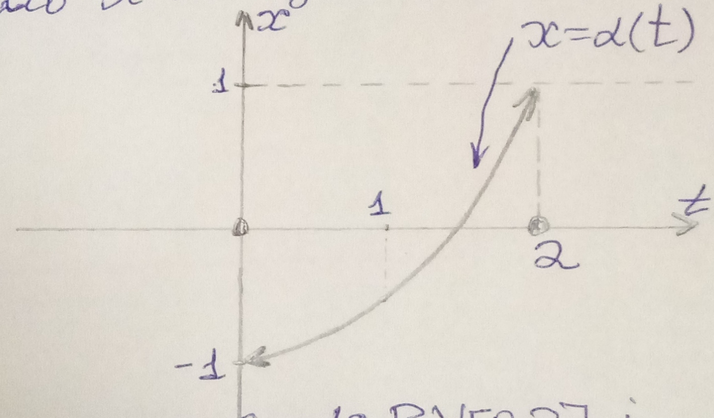
стр. 10

$=V(\alpha;[0,1])=3$.

в) $f(x)=\int_0^2 tx(t)dt-x(0)-x(2),\ x\in C[0,2]$

<u>Розв:</u> Нам потрібно вибрати функцію $\alpha\in BV_0[0,2]$ так, щоб $f(x)=\int_0^2 x(t)d\alpha(t),\ x\in C[0,2]$. Дивлячись на формулу для обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса із теореми 1, оберемо α наступним чином:

$$\alpha(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ \frac{t^2}{2}-1, & t\in(0,2)\\ 0, & t=2.\end{cases}$$



Графік функції α зображено на рисунку.

Тоді маємо:

(1) $\alpha\in BV_0[0,2]$. Дійсно, по-перше $\alpha\in BV[0,2]$ і $V(\alpha;[0,2])=1+2+1=4$ (визначаємо, користуючись геометричним змістом варіації). По-друге, $\alpha(0)=0$. По-третє, α неперервна справа в кожній точці $t_0\in(0,2)$. Тому $\alpha\in BV_0[0,2]$.

(2) Покажемо, що $f(x)=\int_0^2 x(t)d\alpha(t),\ x\in C[0,2]$. Для цього використаємо теорему 1 (про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса). Ми вже знаємо, що $\alpha\in BV[0,2]$. Перевірка умов а) і б) теореми 1 аналогічна перевірці цих умов в попередній задачі, і залишається Вам як вправа. Отже, умови теореми 1 виконані, а тому для $\forall x\in C[0,2]$ маємо:

$$\int_0^2 x(t)d\alpha(t)=\int_0^2 x(t)\alpha'(t)dt+x(0)(\alpha(0+)-\alpha(0-))+x(2)(\alpha(2+)-\alpha(2-))=$$

$$=\int_0^2 tx(t)dt-x(0)-x(2)=f(x).$$

Отже, $f(x)=\int_0^2 x(t)d\alpha(t)$ для $\forall x\in C[0,2]$.

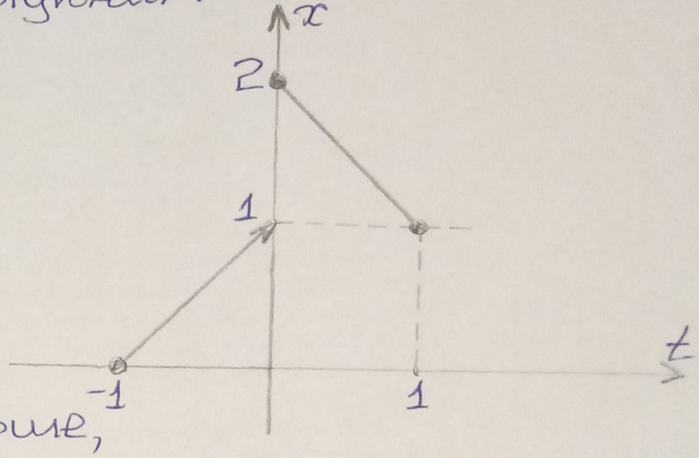
Висновок: за теоремою 2 $f\in (C[0,2])'$ і $\|f\|=\|\alpha\|_V=$

$=V(\alpha;[0,2])=4$.

c) $f(x)=\int_{-1}^0 x(t)dt-\int_0^1 x(t)dt+x(0)$, $x\in C[-1,1]$

Р-ок: Нам потрібно вибрати функцію $\alpha\in BV_0[-1,1]$ так, щоб $f(x)=\int_{-1}^1 x(t)d\alpha(t)$, $x\in C[-1,1]$. Дивлячись на формулу для обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса із теореми 1, оберемо α наступним чином:

$$\alpha(t)=\begin{cases} t+1, & t\in[-1,0) \\ 2-t, & t\in[0,1] \end{cases}.$$



Графік функції α зображено на рисунку.

Тоді маємо:

1) $\alpha\in BV_0[-1,1]$. Дійсно, по-перше, $\alpha\in BV[-1,1]$ і $V(\alpha;[-1,1])=1+1+1=3$ (визначаємо, користуючись геометричним змістом варіації). По-друге, $\alpha(-1)=0$. По-третє, α неперервна справа в кожній точці $t_0\in(-1,1)$. Тому $\alpha\in BV_0[-1,1]$.

2) Покажемо, що $f(x)=\int_{-1}^1 x(t)d\alpha(t)$, $x\in C[-1,1]$. Для цього використаємо теорему 1 (про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса). Ми вже знаємо, що $\alpha\in BV[-1,1]$. Залишається перевірити дві умови.

Умова а) Функція α неперервна в усіх точках відрізка $[-1,1]$ за виключенням однієї точки $c_1=0$. В точці 0 α має розрив першого роду. При цьому $\alpha(0-)=1$, $\alpha(0+)=2$.

Умова б) Знаходимо: $\alpha'(t)=\begin{cases} 1, & t\in[-1,0) \\ -1, & t\in(0,1] \\ \text{не існує}, & t=0. \end{cases}$

Така функція $\alpha'\in R[-1,1]$ (α' можна довизначити довільним чином в т. 0. Одержана функція буде обмеженою на $[-1,1]$ і буде мати рівно одну точку розриву (точку 0) на $[-1,1]$. Тому вона буде інтегровною за Ріманом на $[-1,1]$.)

Отже, умови теореми 1 виконані $\Rightarrow$ для $\forall x \in C[-1,1]$ маємо: $\int_{-1}^{1} x(t)\,d\alpha(t) = \int_{-1}^{1} x(t)\alpha'(t)\,dt + x(0)(\alpha(0+)-\alpha(0-)) =$

$$= \int_{-1}^{0} x(t)\cdot 1\,dt + \int_{0}^{1} x(t)\cdot(-1)\,dt + x(0)(2-1) =$$

$$= \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt + x(0) = f(x).$$ Отже,

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,d\alpha(t),\ x \in C[-1,1].$$

Висновок: за теоремою 2 $f \in (C[-1,1])'$ і $\|f\| = \|\alpha\|_V = V(\alpha;[-1,1]) = 3$.

Домашнє завдання

Задача 1 Нехай X – нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X \to \mathbb{K}$. Перевірити, що f коректно визначений, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f — неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$:

a) $X = L_1[0,1]$, $f(x) = \int_0^1 t e^{it} x(t)\,dt$, $x \in X$.

b) $X = L_2[0,1]$, $f(x) = \int_0^1 t e^{it} x(t)\,dt$, $x \in X$.

c) $X = L_\infty[0,1]$, $f(x) = \int_0^1 t e^{it} x(t)\,dt$, $x \in X$.

d) $X = L_4[a,b]$, $f(x) = \int_a^b \sqrt[3]{|x(t)|}\,dt$, $x \in X$ (тут $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

e) $X = L_2[0,1]$, $f(x) = \int_0^1 |x(t)|^{3/4}\,dt$, $x \in X$.

Задача 2 Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

a) $X = L_p[0,1]$, де $1 \le p \le +\infty$; $f(x) = \int_0^1 t e^{it} x(t)\,dt$, $x \in X$.

b) $X = L_1(\mathbb{R})$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{arcctg} t)\, x(t)\,dt$, $x \in X$.

c) $X = L_p[1,4]$, де $1 \le p \le +\infty$; $f(x) = \int_1^2 t\,x(t)\,dt - 2\int_3^4 x(t)\,dt$, $x \in X$.

d) $X = L_p(\mathbb{R})$, де $1 \le p \le +\infty$; $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} x(t)\,dt$, $x \in X$.

e) $X = L_\infty[1,+\infty)$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} x(t)\,dt$, $x \in X$.

Задача 3 Користуючись описом спряженого простору $(C[a,b])'$, довести, що наведені функціонали є неперервними лінійними функціоналами на $C[a,b]$ і знайти їх норми:

a) $f(x)=\int_0^1 t\,x(t)\,dt$, $x\in C[0,2]$

b) $f(x)=\int_0^1 t\,x(t)\,dt-2x(\frac{1}{2})$, $x\in C[0,2]$

c) $f(x)=\int_0^1 x(t)\,dt-2\int_2^3 t\,x(t)\,dt$, $x\in C[0,3]$

d) $f(x)=\int_0^1 x(t)\,dt-2\int_2^3 t\,x(t)\,dt+2x(1)-3x(2)$, $x\in C[0,3]$

e)* $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x(\frac{1}{n})$, $x\in C[0,1]$.