Практичне заняття 7: Неперервні лінійні функціонали в просторах l_p.

Задача 1. Нехай X — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X \to \mathbb{K}$. Перевірити, що f коректно визначений, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f — неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$.

а) $X = l_1$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_1$.

Р-ок. Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x \in l_1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ збігається $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ теж збігається.

Функціонал f є лінійним. Дійсно, для $\forall x, y \in l_1$ і $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ маємо: $f(\alpha x + \beta y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha x + \beta y)_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) =$

$= \left| \begin{matrix} \text{користуємось} \\ \text{властивостями} \\ \text{збіжних рядів} \end{matrix} \right| = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \alpha f(x) + \beta f(y).$

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x \in l_1$ маємо: $|f(x)| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$ (норма x в l_1).

Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le \|x\|_1$, $x \in l_1$, то $\|f\| \le 1$. З іншого боку, розглянемо послідовність $x_0 = (1, 0, 0, 0, \dots) \in l_1$. Тоді $\|x_0\|_1 = 1$ і $f(x_0) = 1$. Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \ge \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_1} = 1$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \le 1$ і $\|f\| \ge 1 \Rightarrow \|f\| = 1$.

ст. 1

Висновок: $f \in l_1'$ і $\|f\| = 1$.

Зауваження: В якості послідовності x_0 можна було взяти довільну ненульову послідовність з невід'ємними членами, яка належить l_1.

в) $X = l_1$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_1$.

Р-ок: Функціонал f коректно визначений. Дійсно, якщо $x \in l_1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ збігається $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right|$ теж збігається (бо $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)|x_n| \le |x_n|$, $n \ge 1$) $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$ збігається.

Функціонал f є лінійним. Дійсно, для $\forall x, y \in l_1$ і $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ маємо: $f(\alpha x + \beta y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)(\alpha x + \beta y)_n =$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)(\alpha x_n+\beta y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n+\beta\left(1-\frac{1}{n}\right)y_n\right)=$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)y_n=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in l_1$ маємо: $|f(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)x_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)|x_n|\le$ $\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\|x\|_1$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow$ f неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)|\le\|x\|_1$, $x\in l_1$, то $\|f\|\le 1$. З іншого боку, для кожного $k\ge 1$ розглянемо послідовність $x^{(k)}=(0,0,0,\dots,0,\underset{k\text{-е місце}}{1},0,0,\dots)\in l_1$. Тоді $\|x^{(k)}\|_1=1$ і $f(x^{(k)})=1-\frac{1}{k}$. Тому $\|f\|=\sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_1}\ge\frac{|f(x^{(k)})|}{\|x^{(k)}\|_1}=$ $=1-\frac{1}{k}$. Таким чином, $\|f\|\ge 1-\frac{1}{k}$ для довільного $k\ge 1$. А тоді $\|f\|\ge\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1$. Таким чином, ми довели, що $\|f\|\le 1$ і $\|f\|\ge 1$ $\Rightarrow\|f\|=1$.

Висновок: $f\in l_1'$ і $\|f\|=1$.

Зауваження: В цій задачі $|f(x)|<\|x\|_1$ для довільного $x\in l_1$, $x\ne 0$.

ст 2

c) $X=l_2$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$, $x=(x_1,x_2,x_3,\dots)\in l_2$.

Р-ок. Очевидно, що функціонал f коректно визначений. Функціонал f не є лінійним. Щоб акуратно це довести, розглянемо послідовність $x=(1,0,0,0,\dots)\in l_2$. Тоді $f(x)=1$, $f(-x)=1\Rightarrow f(-x)\ne -f(x)\Rightarrow f$ не є лінійним.

Функціонал f неперервний. Щоб це довести, запишемо $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\|x\|_2^2$; означимо функціонал $g: l_2\to\mathbb{R}$ рівністю $g(x)=\|x\|_2$, $x\in l_2$. Тоді функціонал g неперервний (неперервність g в $\forall$ точці $x_0\in l_2$ випливає із нерівності $|g(x)-g(x_0)|=\left|\|x\|_2-\|x_0\|_2\right|\le\|x-x_0\|_2$), а тому функціонал $f=g^2$ теж неперервний.

Висновок: f не є лінійним, але є неперервним.

d) $X=l_2$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$, $x=(x_1,x_2,x_3,\dots)\in l_2$

Р-ок: Функціонал f коректно визначений. Щоб це довести, нам потрібно показати, що для $\forall x\in l_2$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$ збігається. Для цього досить показати, що для $\forall x\in l_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n}\right|$ збігається. Маємо:
$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot|x_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|x_n|^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 <$
$< +\infty \Rightarrow$ для $\forall x\in l_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n}\right|$ збігається $\Rightarrow$
f коректно визначений.

Функціонал f є лінійним. Перевірка — самостійно.

Функціонал f є обмеженим. Дійсно, для $\forall x\in l_2$ маємо: $|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\cdot\frac{1}{n}\right| \le$ | використовуємо нерівність Гельдера для рядів із $p=2, q=2$ |
$\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\cdot\|x\|_2 =$
$= \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|x\|_2$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|x\|_2$, $x\in l_2$, то $\|f\| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. З іншого боку, розглянемо послідовність $x^{(0)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)\in l_2$. Тоді $\|x^{(0)}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} =$
$= \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ і $f(x^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Тому $\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \ge$
$\ge \frac{|f(x^{(0)})|}{\|x^{(0)}\|_2} = \frac{\frac{\pi^2}{6}}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Таким чином, ми довели, що

ст 3

$\|f\| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ і $\|f\| \ge \frac{\pi}{\sqrt{6}} \Rightarrow \|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Висновок: $f\in l_2'$ і $\|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

e1) $X = l_1$, $f(x) = x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)\in l_1$.

Р-ок. Очевидно, що f коректно визначений і лінійний. Доведемо, що f обмежений. Для $\forall x\in l_1$ маємо
$|f(x)| = |x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3| \le |x_1| + |-2x_2| + |(1+i)x_3| =$
$= |x_1| + 2|x_2| + \sqrt{2}|x_3| \le 2(|x_1|+|x_2|+|x_3|) \le 2\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = 2\|x\|_1$.
Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le 2\|x\|_1$, $x\in l_1$, то $\|f\| \le 2$. З іншого боку, розглянемо послідовність $x^{(0)} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)\in l_1$. Тоді $\|x^{(0)}\|_1 = 1$ і $f(x^{(0)}) = -2$.

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \geq \frac{|f(x^{(0)})|}{\|x^{(0)}\|_1} = \frac{|-2|}{1} = 2$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq 2$ і $\|f\| \geq 2 \Rightarrow \|f\| = 2$.

Висновок: $f \in l_1'$ і $\|f\| = 2$.

е2) $X = l_2$, $f(x) = x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2$.

Р-ок Очевидно, що f коректно визначений і лінійний. Доведемо, що f обмежений. Для $\forall x \in l_2$ маємо:

$|f(x)| = |x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3| \leq |x_1| + |-2x_2| + |(1+i)x_3| =$

$= |x_1| + 2|x_2| + \sqrt{2}|x_3| \leq \left| \begin{matrix} \text{використовуємо} \\ \text{нерівність} \\ \text{Коші-Буняковського} \end{matrix} \right| \leq$

ст 4

$\sqrt{1^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2} \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} = \sqrt{7} \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \leq$

$\leq \sqrt{7} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt{7}\|x\|_2$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \leq \sqrt{7}\|x\|_2$, $x \in l_2$, то $\|f\| \leq \sqrt{7}$. З іншого боку, розглянемо послідовність $x^{(0)} = (1, -2, 1-i, 0, 0, 0, \ldots) \in l_2$. Тоді $\|x^{(0)}\|_2 = \sqrt{1^2 + |-2|^2 + |1-i|^2} =$

$= \sqrt{1+4+2} = \sqrt{7}$ і $f(x^{(0)}) = 1 - 2(-2) + (1+i)(1-i) = 1+4+2 = 7$.

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \geq \frac{|f(x^{(0)})|}{\|x^{(0)}\|_2} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq \sqrt{7}$ і $\|f\| \geq \sqrt{7} \Rightarrow \|f\| = \sqrt{7}$.

Висновок: $f \in l_2'$ і $\|f\| = \sqrt{7}$.

е3) $X = l_\infty$, $f(x) = x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_\infty$

Р-ок: Очевидно, що f коректно визначений і лінійний. Доведемо, що f обмежений. Для $\forall x \in l_\infty$ маємо:

$|f(x)| = |x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3| \leq |x_1| + |-2x_2| + |(1+i)x_3| =$

$= |x_1| + 2|x_2| + \sqrt{2}|x_3| \leq \|x\|_\infty + 2\|x\|_\infty + \sqrt{2}\|x\|_\infty = (3+\sqrt{2})\|x\|_\infty$.

Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \leq (3+\sqrt{2})\|x\|_\infty$, $x \in l_\infty$, то $\|f\| \leq 3+\sqrt{2}$. З іншого боку, розглянемо послідовність $x^{(0)} = (1, -1, e^{-i\frac{\pi}{4}}, 0, 0, 0, \ldots) \in l_\infty$. Тоді $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$ і

$f(x^{(0)}) = 1 - 2(-1) + (1+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 + 2 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = 3 + \sqrt{2}$.

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|f(x^{(0)})|}{\|x^{(0)}\|_\infty} = 3+\sqrt{2}$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \leq 3+\sqrt{2}$ і $\|f\| \geq 3+\sqrt{2} \Rightarrow \|f\| = 3+\sqrt{2}$.

Висновок: $f \in l'_\infty$ і $\|f\| = 3+\sqrt{2}$.

Задача 2 Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

а) $X = l_1$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_1$.

Р-ок: Згадуємо, що простір l'_1 можна ототожнити з l_∞. Покладемо $a := (1, 1, 1, \dots)$. Тоді:

① $a \in l_\infty$ і $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| = \sup\limits_{n\geq 1} |1| = 1$

ст. 5

② $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in l_1$.

Тому $f \in l'_1$ і $\|f\| = \|a\|_\infty = 1$.

б) $X = l_1$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_n$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_1$.

Р-ок: Згадуємо, що $l'_1 = l_\infty$. Покладемо $a = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots)$. Тоді:

① $a \in l_\infty$ і $\|a\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 1} |1 - \frac{1}{n}| = \sup\limits_{n\geq 1} (1 - \frac{1}{n}) = 1$;

② $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in l_1$.

Тому $f \in l'_1$ і $\|f\| = \|a\|_\infty = 1$.

с) $X = l_2$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}}$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$.

Р-ок Простір l'_2 можна ототожнити з l_2 (бо $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Покладемо $a = (\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}, \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \dots)$. Тоді

① $a \in l_2$, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$, і $\|a\|_2 = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} = 1$;

② $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in l_2$

Тому $f \in l'_2$ і $\|f\| = \|a\|_2 = 1$.

d) $X=l_{4/3}$, $f(x)=x_1+\sqrt[4]{3}\,x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3,\dots)\in l_{4/3}$

Р-ок У нас $p=\frac{4}{3}$. Знайдемо спряжений до p індекс q: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{3}{4}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{1}{q}=\frac{1}{4}$, $q=4$. Отже, $l'_{4/3}=l_4$. Покладемо $a:=(1,0,\sqrt[4]{3},0,0,0,\dots)$. Тоді:

① $a\in l_4$ і $\|a\|_4=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^4\right)^{1/4}=(1+3)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$;

② $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, $x\in l_{4/3}$.

Тому $f\in l'_{4/3}$ і $\|f\|=\|a\|_4=\sqrt{2}$.

e) $X=l_p$, $1\le p\le+\infty$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}x_n$; $x=(x_1,x_2,\dots)\in l_p$.

Р-ок Покладемо $a=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\dots,\frac{(-1)^{n-1}}{2^n},\dots\right)$.

Розглянемо кілька випадків для індекса p:

1 випадок: $p=1$. Тоді $l'_1=l_\infty$. Маємо:

ст. 6

① $a\in l_\infty$ і $\|a\|_\infty=\sup\limits_{n\ge1}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right|=\sup\limits_{n\ge1}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$;

② $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, $x\in l_1$.

Тому $f\in l'_1$ і $\|f\|=\|a\|_\infty=\frac{1}{2}$.

2 випадок $p\in(1,+\infty)$. Нехай $q\in(1,+\infty)$ — спряжений до p індекс, тобто $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$; $q=\frac{p}{p-1}$. Тоді $l'_p=l_q$. Маємо:

① $a\in l_q$, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nq}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^q}\right)^n=\frac{\frac{1}{2^q}}{1-\frac{1}{2^q}}=\frac{1}{2^q-1}$;

і $\|a\|_q=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q\right)^{1/q}=\frac{1}{(2^q-1)^{1/q}}$.

② $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, $x\in l_p$.

Тому $f\in l'_p$ і $\|f\|=\|a\|_q=\frac{1}{(2^q-1)^{1/q}}$

3 випадок $p=+\infty$. Тоді справедливе ізометричне вкладення: $l_1\subset l'_\infty$. Маємо:

① $a\in l_1$, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ і $\|a\|_1=1$;

② $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$, $x\in l_\infty$.

Тому $f\in l'_\infty$ і $\|f\|=\|a\|_1=1$.

Домашнє завдання:

Задача 1 Нехай X — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X \to \mathbb{K}$. Перевірити, що f коректно визначений, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f — неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$:

a) $X=l_1$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg} n)\,x_n$, $x\in l_1$;

b) $X=l_2$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}x_n$, $x\in l_2$;

c) $X=l_1, l_2, l_\infty$, $f(x)=3x_1+(3+4i)x_5-2x_7$, $x\in X$;

d) $X=l_3$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^3$, $x\in l_3$.

Задача 2 Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

a) Пункти a, b, c із Задачі 1;

b) $X=l_{7/5}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_{3n}}{\sqrt[7]{n^4}}$, $x\in l_{7/5}$;

c) $X=l_p$, де $1\le p\le+\infty$, $f(x)=2x_1+4x_3$, $x\in l_p$;

d) $X=l_p$, де $1\le p\le+\infty$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{3^n}x_{n^2}$, $x\in l_p$.

Задача 3* Нехай f — неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі $c_0\subset l_\infty$. Довести, що існує єдине продовження f на l_∞ із збереженням норми.