Практичне заняття 6: Неперервні лінійні функціонали в просторах неперервних функцій.

Нехай поле $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Нагадаємо, що $C[a,b]=\{x:[a,b]\to\mathbb{K} \mid$ функція x неперервна на $[a,b]\}$. Якщо не сказано інше, то на просторі $C[a,b]$ розглядається стандартна норма $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

Задача 1 Нехай X — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X\to\mathbb{K}$. Перевірити, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f — неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$.

ст 1

а) $f(x)=x(\frac{1}{2})$, $x\in C[0,1]=X$

Р-ок. Функціонал f є лінійним. Дійсно, для довільних $x,y\in C[0,1]$ і скалярів α,β маємо: $f(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)(\frac{1}{2})=$ $=\alpha x(\frac{1}{2})+\beta y(\frac{1}{2})=\alpha f(x)+\beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $|f(x)|=|x(\frac{1}{2})|\le\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|=\|x\|$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)|\le\|x\|$, $x\in C[0,1]$, то $\|f\|\le 1$. З іншого боку, розглянемо функцію $x_0\in C[0,1]$, визначену правилом $x_0(t)=1$, $t\in[0,1]$. Тоді $\|x_0\|=1$ і $f(x_0)=x_0(\frac{1}{2})=1$. Тому $\|f\|=\sup\limits_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\ge\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{1}{1}=1$.

Таким чином, ми довели, що $\|f\|\le 1$ і $\|f\|\ge 1\Rightarrow\|f\|=1$.

Висновок: $f\in(C[0,1])^*$ і $\|f\|=1$.

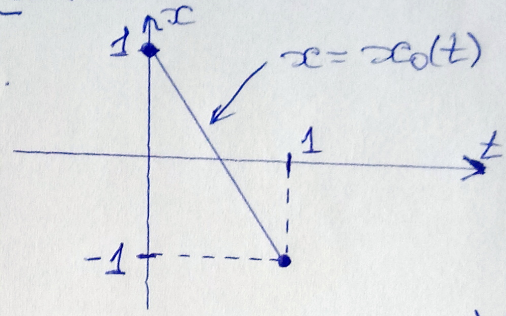
б) $f(x)=2x(0)-x(1)$, $x\in C[0,1]=X$.

Р-ок. Функціонал f є лінійним. Дійсно, для довільних $x,y\in C[0,1]$ і скалярів α,β маємо: $f(\alpha x+\beta y)=$
$=2(\alpha x+\beta y)(0)-(\alpha x+\beta y)(1)=2(\alpha x(0)+\beta y(0))-(\alpha x(1)+\beta y(1))=$
$=\alpha(2x(0)-x(1))+\beta(2y(0)-y(1))=\alpha f(x)+\beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $|f(x)|=|2x(0)-x(1)|\le|2x(0)|+|-x(1)|=$ $=2|x(0)|+|x(1)|\le 2\|x\|+\|x\|=3\|x\|$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le 3\|x\|$, $x \in C[0,1]$, то $\|f\| \le 3$. З іншого боку, розглянемо функцію $x_0 \in C[0,1]$, визначену правилом

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t=0 \\ -1, \text{ якщо } t=1 \\ \text{лінійна на } [0,1] \end{cases}$$



Тоді $\|x_0\| = 1$ і

$f(x_0) = 2 \cdot 1 - (-1) = 3$.

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \dfrac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \dfrac{3}{1} = 3$.

Таким чином, ми довели, що

$\|f\| \le 3$ і $\|f\| \ge 3 \Rightarrow \|f\| = 3$

Висновок: $f \in (C[0,1])'$ і $\|f\| = 3$.

c) $f(x) = 2x(\frac{1}{4}) - 3x(\frac{1}{3}) + x(\frac{1}{2}) - 5x(\frac{2}{3})$, $x \in C[0,1] = X$.

Р-ок Функціонал f є лінійним. Перевірка — самостійно.

Функціонал f є обмеженим. Дійсно, для $\forall x \in C[0,1]$ маємо: $|f(x)| = |2x(\frac{1}{4}) - 3x(\frac{1}{3}) + x(\frac{1}{2}) - 5x(\frac{2}{3})| \le$

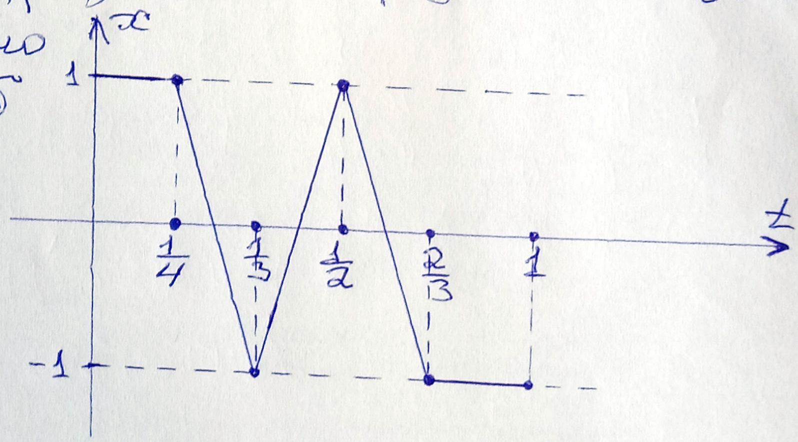
ст. 2

$\le |2x(\frac{1}{4})| + |-3x(\frac{1}{3})| + |x(\frac{1}{2})| + |-5x(\frac{2}{3})| =$

$= 2|x(\frac{1}{4})| + 3|x(\frac{1}{3})| + |x(\frac{1}{2})| + 5|x(\frac{2}{3})| \le 2\|x\| + 3\|x\| + \|x\| + 5\|x\| =$

$= 11\|x\|$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le 11\|x\|$, $x \in C[0,1]$, то $\|f\| \le 11$. З іншого боку, розглянемо функцію $x_0 \in C[0,1]$, графік якої зображено на рисунку (масштаб трохи неправильний).



Можна записати

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ -1, & t = \frac{1}{3} \\ 1, & t = \frac{1}{2} \\ -1, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \\ \text{лінійна на кожному} \\ \text{з проміжків } [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]. \end{cases}$$

Тоді $\|x_0\| = 1$ і $f(x_0) = 2 + 3 + 1 + 5 = 11$. Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \dfrac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \dfrac{11}{1} = 11$. Таким чином, ми довели, що $\|f\| \le 11$ і $\|f\| \ge 11 \Rightarrow \|f\| = 11$.

Висновок: $f \in (C[0,1])'$ і $\|f\| = 11$.

d) $f(x)=\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$, $x\in C[a,b]=X$.

Р-ок Функціонал f не є лінійним. Щоб акуратно це довести, розглянемо функцію $x_0\in C[a,b]$, визначену правилом $x_0(t)=1$, $t\in[a,b]$. Тоді $f(x_0)=1$ і $f(-x_0)=1$, а тому $f(-x_0)\neq -f(x_0) \Rightarrow f$ не є лінійним.

Функціонал f є неперервним. Доведемо це. Розглянемо $\forall x_1\in C[a,b]$ і доведемо, що f неперервний в точці x_1. Для $\forall x\in C[a,b]$ маємо: $|f(x)-f(x_1)|=\big|\|x\|-\|x_1\|\big|\leq\|x-x_1\|$, а тому $f(x)\to f(x_1)$ при $x\to x_1 \Rightarrow f$ неперервний в т. x_1. Оскільки x_1 — довільна точка $C[a,b]$, то f неперервний.

Висновок: функціонал f не лінійний, але неперервний.

e) $f(x)=(x(a))^2+(x(b))^3$, $x\in C[a,b]=X$.

ст. 3

Р-ок Функціонал f не є лінійним. Щоб акуратно це довести, розглянемо функцію $x\in C[a,b]$, визначену правилом $x(t)=1$, $t\in[a,b]$. Тоді $f(x)=2$ і $f(2x)=12$, а тому $f(2x)\neq 2f(x) \Rightarrow f$ не є лінійним.

Функціонал f є неперервним. Доведемо це. Розглянемо $\forall x_0\in C[a,b]$ і доведемо, що f неперервний в точці x_0. Згадуємо означення неперервності в т. x_0 за Гейне (на мові послідовностей). Розглянемо довільну послідовність $\{x_n | n\geq 1\}$ із $C[a,b]$, таку, що $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ в $C[a,b]$. Тоді нам потрібно довести, що $f(x_n)\to f(x_0)$, $n\to\infty$. Оскільки $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ в $C[a,b]$, то для довільного $t\in[a,b]$ $x_n(t)\to x_0(t)$, $n\to\infty$ (це випливає із нерівності $|x_n(t)-x_0(t)|\leq\|x_n-x_0\|\to 0$, $n\to\infty$), а тому $x_n(a)\to x_0(a)$, $n\to\infty$ і $x_n(b)\to x_0(b)$, $n\to\infty$. Тоді
$f(x_n)=(x_n(a))^2+(x_n(b))^3\to(x_0(a))^2+(x_0(b))^3=f(x_0)$, $n\to\infty$.
Отже, f неперервний в т. x_0. Оскільки x_0 — довільна точка $C[a,b]$, то функціонал f неперервний.

Висновок: функціонал f не лінійний, але неперервний.

f) $f(x)=\int_a^b (x(t))^{2020}\,dt$, $x\in C[a,b]=X$.

Р-ок. Функціонал f не є лінійним. Щоб акуратно це довести, розглянемо функцію $x\in C[a,b]$, визначену правилом $x(t)=1,\ t\in[a,b]$. Тоді $f(x)=b-a$, $f(-x)=b-a$, а тому $f(-x)\neq -f(x) \Rightarrow f$ не є лінійним.

Функціонал f є неперервним. Доведемо це. Розглянемо $\forall x_0\in C[a,b]$ і доведемо, що f неперервний в т. x_0.

1 спосіб Доводимо неперервність f в т. x_0 на мові послідовностей. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів $C[a,b]$, таку, що $x_n\to x_0,\ n\to\infty$ в $C[a,b]$. Тоді нам потрібно довести, що $f(x_n)\to f(x_0),\ n\to\infty$.

Оскільки $x_n\to x_0,\ n\to\infty$ в $C[a,b]$, то $\|x_n\|\to\|x_0\|,\ n\to\infty$, а тому $\{\|x_n\| \mid n\geq 1\}$ обмежена $\Rightarrow \exists C>0:\ \forall n\geq 1\ \|x_n\|\leq C$. Тоді $\forall n\geq 1$ і для $\forall t\in[a,b]$ $|x_n(t)|\leq C \Rightarrow \forall n\geq 1$ і для $\forall t\in[a,b]$ $|(x_n(t))^{2020}|\leq C^{2020}$. Далі, оскільки $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ в $C[a,b]$, то для $\forall t\in[a,b]$ $x_n(t)\to x_0(t),\ n\to\infty$ (це випливає із того, що $|x_n(t)-x_0(t)|\leq\|x_n-x_0\|\to 0,\ n\to\infty$) $\Rightarrow \forall t\in[a,b]$ $(x_n(t))^{2020}\to(x_0(t))^{2020},\ n\to\infty$.

Тоді за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b (x_n(t))^{2020}\,dt=\int_a^b (x_0(t))^{2020}\,dt=f(x_0).$$

ст.4

Отже, f неперервний в т. x_0.

2 спосіб Доведемо, що $f(x)\to f(x_0)$ при $x\to x_0$. Для цього оцінимо $|f(x)-f(x_0)|$ для $x\in B(x_0,1)$ (куля з центром x_0 радіуса 1). Позначимо $M=\max\limits_{t\in[a,b]}|x_0(t)|$, тоді для $\forall x\in B(x_0,1)$ і $\forall t\in[a,b]$ маємо: $|x(t)|=|x(t)-x_0(t)+x_0(t)|\leq|x(t)-x_0(t)|+|x_0(t)|\leq\|x-x_0\|+M<M+1$. Тоді для $\forall x\in B(x_0,1)$ маємо:

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\int_a^b (x(t))^{2020}\,dt-\int_a^b (x_0(t))^{2020}\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_a^b \left((x(t))^{2020}-(x_0(t))^{2020}\right)dt\right|\leq\int_a^b\left|(x(t))^{2020}-(x_0(t))^{2020}\right|dt=$$

$$=\int_a^b\left|(x(t)-x_0(t))\left((x(t))^{2019}+(x(t))^{2018}x_0(t)+(x(t))^{2017}(x_0(t))^2+\ldots+x(t)(x_0(t))^{2018}+(x_0(t))^{2019}\right)\right|dt\leq\int_a^b|x(t)-x_0(t)|\left(|x(t)|^{2019}+\right.$$

$$\left.+|x(t)|^{2018}|x_0(t)|+|x(t)|^{2017}|x_0(t)|^2+\ldots+|x(t)|\cdot|x_0(t)|^{2018}+|x_0(t)|^{2019}\right)dt\leq$$

$\leq \int_a^b \|x-x_0\| \big(\underbrace{(M+1)^{2019} + (M+1)^{2018} \cdot M + (M+1)^{2017} \cdot M^2 + \ldots + (M+1) \cdot M^{2018} + M^{2019}}_{\text{стала, позначимо як } C} \big) dt$

$= C(b-a)\|x-x_0\| = C_1 \|x-x_0\|$. Отже, ми довели, що для $\forall x \in B(x_0, 1)$ $|f(x)-f(x_0)| \leq C_1 \|x-x_0\|$, де $C_1 = C_1(x_0)$. Тому $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0 \Rightarrow f$ неперервний в т. x_0.

Отже, ми довели, що функціонал f неперервний в т. x_0, а оскільки точка $x_0 \in C[a,b]$ довільна, то функціонал f неперервний.

Висновок: функціонал f не лінійний, але неперервний.

g) $f(x) = \int_0^1 t\, x(t)\, dt$, $x \in C[0,1] = X$.

ст. 5

Р-ок Функціонал f лінійний. Дійсно, для $\forall x, y \in C[0,1]$ і $\forall$ скалярів α, β маємо: $f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 t(\alpha x + \beta y)(t)\, dt =$
$= \int_0^1 t(\alpha x(t) + \beta y(t))\, dt = \int_0^1 (\alpha t\, x(t) + \beta t\, y(t))\, dt = \left| \begin{matrix} \text{користуємось} \\ \text{лінійністю} \\ \text{інтеграла} \end{matrix} \right| =$
$= \alpha \int_0^1 t\, x(t)\, dt + \beta \int_0^1 t\, y(t)\, dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x \in C[0,1]$ маємо: $|f(x)| = \left| \int_0^1 t\, x(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |t\, x(t)|\, dt = \int_0^1 t\, |x(t)|\, dt \leq$
$\leq \int_0^1 t \cdot \|x\|\, dt = \|x\| \cdot \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} \|x\|$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, $x \in C[0,1]$, то $\|f\| \leq \frac{1}{2}$. З іншого боку, розглянемо функцію $x_0 \in C[0,1]$, визначену правилом $x_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$. Тоді $\|x_0\| = 1$ і $f(x_0) = \int_0^1 t \cdot 1\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$. Тому $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} =$
$= \frac{1}{2}$. Отже, ми довели, що $\|f\| \leq \frac{1}{2}$ і $\|f\| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\|f\| = \frac{1}{2}$.

Висновок: $f \in (C[0,1])'$ і $\|f\| = \frac{1}{2}$.

h) $f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt - x(0)$, $x \in C[0,1] = X$.

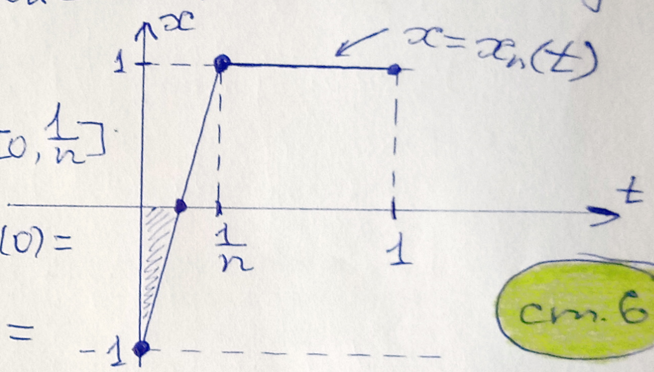
Р-ок Функціонал f лінійний. Дійсно, для $\forall x, y \in C[0,1]$ і $\forall$ скалярів α, β маємо: $f(\alpha x + \beta y) =$

$= \int_0^1 (\alpha x+\beta y)(t)dt - (\alpha x+\beta y)(0) = \int_0^1 (\alpha x(t)+\beta y(t))dt - (\alpha x(0)+$
$+\beta y(0)) = \alpha\int_0^1 x(t)dt + \beta\int_0^1 y(t)dt - \alpha x(0) - \beta y(0) =$
$= \alpha\left(\int_0^1 x(t)dt - x(0)\right) + \beta\left(\int_0^1 y(t)dt - y(0)\right) = \alpha f(x)+\beta f(y).$

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)dt - x(0)\right| \le \left|\int_0^1 x(t)dt\right| + |-x(0)| \le$ $\le \int_0^1 |x(t)|dt + |x(0)| \le \int_0^1 \|x\|dt + \|x\| = 2\|x\|$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow$ f неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le 2\|x\|$, $x\in C[0,1]$, то $\|f\|\le 2$. Покажемо, що $\|f\|\ge 2$. Для кожного $n\ge 1$ розглянемо функцію $x_n\in C[0,1]$, визначену правилом

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & t=0\\ 1, & t\in[\frac{1}{n},1]\\ \text{лінійна на } [0,\frac{1}{n}]\end{cases}$$



Тоді $\|x_n\|=1$ і $f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)dt - x_n(0) =$
$= \int_0^{\frac{1}{2n}} x_n(t)dt + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 x_n(t)dt + 1 =$
$= -S + S + 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$ (тут S — площа заштрихованого трикутника)

ст. 6

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = 2-\frac{1}{n}$. Отже, $\|f\|\ge 2-\frac{1}{n}$ для $\forall n\ge 1 \Rightarrow \|f\|\ge 2$. Отже, ми довели, що $\|f\|\le 2$ і $\|f\|\ge 2 \Rightarrow \|f\|=2$.

Висновок: $f\in (C[0,1])'$ і $\|f\|=2$.

і) $f(x)=\int_0^1 x(t)\cos\pi t\,dt$, $x\in C[0,1]=X$.

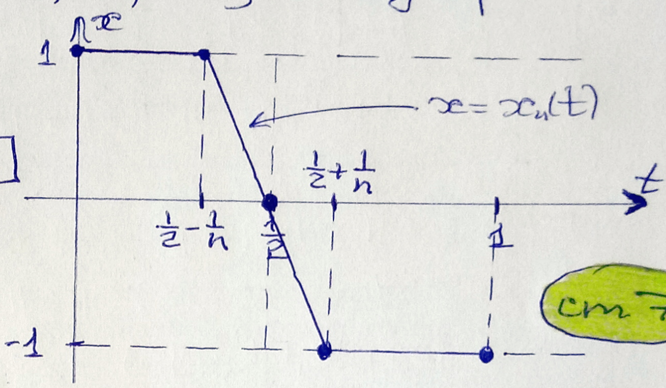
Р-ок Функціонал f лінійний. Перевірка — самостійно.
Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\cos\pi t\,dt\right| \le \int_0^1 |x(t)\cos\pi t|dt =$
$= \int_0^1 |x(t)|\cdot|\cos\pi t|dt \le \int_0^1 \|x\||\cos\pi t|dt = \int_0^1 |\cos\pi t|dt\cdot\|x\|.$

Обчислимо $\int_0^1 |\cos\pi t|dt = \int_0^{1/2}\cos\pi t\,dt - \int_{1/2}^1 \cos\pi t\,dt =$
$= \frac{1}{\pi}\sin\pi t\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi t\Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}(0-1) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$

Таким чином, ми показали, що $|f(x)| \le \frac{2}{\pi}\|x\|$, $x \in C[0,1]$.
Отже, функціонал f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le \frac{2}{\pi}\|x\|$, $x \in C[0,1]$, то $\|f\| \le \frac{2}{\pi}$. Покажемо, що $\|f\| \ge \frac{2}{\pi}$. Для кожного $n \ge 3$ розглянемо функцію $x_n \in C[0,1]$, визначену правилом

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ -1, & t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \\ \text{лінійна на } [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \end{cases}$$



ст 7

Очевидно, що $\|x_n\| = 1$.
Доведемо, що

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt \to \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt, \quad n \to \infty.$$

Це можна зробити кількома способами:

1 спосіб Безпосередньо. Можна написати явну формулу для $x_n(t)$, $t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ і порахувати

$$\int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} 1\cdot\cos\pi t\,dt + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} x_n(t)\cos\pi t\,dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} (-1)\cos\pi t\,dt$$

і впевнитись у тому, що $\int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt \to \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt = \frac{2}{\pi}$, $n \to \infty$.

2 спосіб Можна скористатись теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Справді:

① $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n(t)\cos\pi t) = |\cos\pi t|$ для довільного $t \in [0,1]$

② $|x_n(t)\cos\pi t| = |x_n(t)| \cdot |\cos\pi t| \le |\cos\pi t|$, $t \in [0,1]$ і $\int_0^1 |\cos\pi t|\,dt = \frac{2}{\pi} < +\infty$.

Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt = \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt$.

3 спосіб Оцінимо зверху $\left| \int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt - \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt \right| =$

$$= \left| \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt - \int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt \right| =$$

$$= \Big| \cancel{\int_0^{\frac12-\frac1n} \cos\pi t\,dt} + \int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} \cos\pi t\,dt - \int_{1/2}^{\frac12+\frac1n} \cos\pi t\,dt - \cancel{\int_{\frac12+\frac1n}^{1} \cos\pi t\,dt} -$$

$$- \cancel{\int_0^{\frac12-\frac1n} 1\cdot\cos\pi t\,dt} - \int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} x_n(t)\cos\pi t\,dt - \int_{1/2}^{\frac12+\frac1n} x_n(t)\cos\pi t\,dt - \cancel{\int_{\frac12+\frac1n}^{1} (-1)\cos\pi t\,dt} \Big|$$

$$= \Big| \underbrace{\int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} (1-x_n(t))\cos\pi t\,dt}_{\geq 0} - \underbrace{\int_{1/2}^{\frac12+\frac2n} (1+x_n(t))\cos\pi t\,dt}_{\leq 0} \Big| =$$

ст. 8

$$= \int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} (1-x_n(t))\cos\pi t\,dt - \int_{1/2}^{\frac12+\frac1n} (1+x_n(t))\cos\pi t\,dt =$$

$$= \int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} \underbrace{(1-x_n(t))}_{з\,[0,1]} \underbrace{\cos\pi t}_{з\,[0,1]}\,dt + \int_{1/2}^{\frac12+\frac1n} \underbrace{(1+x_n(t))}_{з\,[0,1]} \underbrace{(-\cos\pi t)}_{з\,[0,1]}\,dt \leq$$

$$\leq \int_{\frac12-\frac1n}^{1/2} 1\,dt + \int_{1/2}^{\frac12+\frac1n} 1\,dt = \frac1n + \frac1n = \frac2n \longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

Звідси $\int_0^1 x_n(t)\cos\pi t\,dt \longrightarrow \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt,\ n\to\infty$.

Тепер ми готові довести, що $\|f\| \geq \frac{2}{\pi}$. Для $\forall n \geq 3$

$\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} \geq f(x_n)$, а тому

$$\|f\| \geq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 |\cos\pi t|\,dt = \frac{2}{\pi}.$$

Отже, ми довели, що $\|f\| \leq \frac{2}{\pi}$ і $\|f\| \geq \frac{2}{\pi} \Rightarrow \|f\| = \frac{2}{\pi}$.

Висновок: $f \in (C[0,1])'$ і $\|f\| = \frac{2}{\pi}$.

д) $f(x) = \int_0^{\pi/2} x(t)\cos t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} x(t)\sin t\,dt - 2x\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3x\left(\frac{3\pi}{4}\right)$,

$x \in C[0,\pi] = X$.

Р-ок Функціонал f лінійний. Перевірка — самостійно.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x \in C[0,\pi]$ маємо: $|f(x)| = \Big| \int_0^{\pi/2} x(t)\cos t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} x(t)\sin t\,dt - 2x\left(\frac{\pi}{4}\right) +$

$$+ 3x\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Big| \leq \Big|\int_0^{\pi/2} x(t)\cos t\,dt\Big| + \Big|\int_{\pi/2}^{\pi} x(t)\sin t\,dt\Big| + 2\Big|x\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big| +$$

$+3|x(\frac{3\pi}{4})| \le \int_0^{\pi/2} |x(t)|\cdot|\cos t|\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |x(t)|\cdot|\sin t|\,dt + 2|x(\frac{\pi}{4})| +$

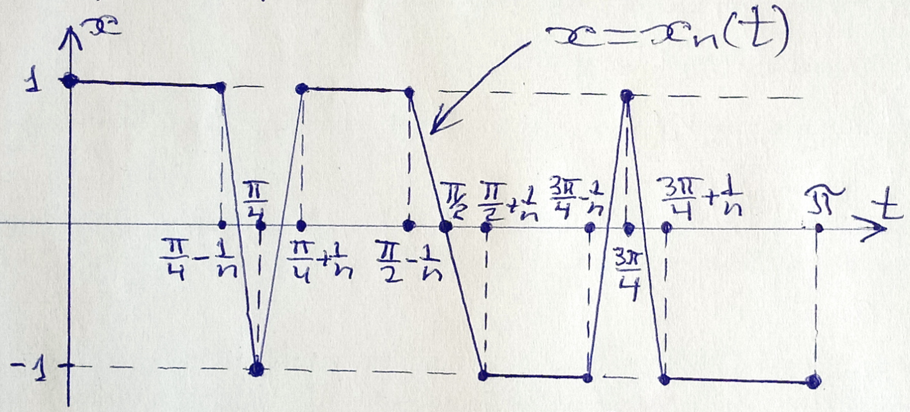
$+3|x(\frac{3\pi}{4})| \le \int_0^{\pi/2} \|x\|\cdot\cos t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \|x\|\sin t\,dt + 2\|x\| + 3\|x\| =$

$= \|x\|\cdot\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \|x\|\cos t\Big|_{\pi/2}^{\pi} + 5\|x\| = \|x\| + \|x\| + 5\|x\| = 7\|x\|.$

Таким чином, $|f(x)| \le 7\|x\|$, $x \in C[0,\pi]$. Отже, f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки $|f(x)| \le 7\|x\|$, $x \in C[0,\pi]$, то $\|f\| \le 7$. Покажемо, що $\|f\| \ge 7$. Для кожного $n \ge n_0$ (номер n_0 вибирається так, щоб $\frac{2}{n_0} < \frac{\pi}{4}$; $n_0 > \frac{8}{\pi}$, тому можна взяти $n_0 = 3$) розглянемо функцію $x_n \in C[0,\pi]$, графік якої зображено нижче:

ст.9



Вправа Написати явний вигляд $x_n(t)$.

Очевидно, що $\|x_n\| = 1$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2} x_n(t)\cos t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} x_n(t)\sin t\,dt - 2(-1) + 3\cdot 1\right) =$

$= 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} x_n(t)\cos t\,dt - \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\pi/2}^{\pi} x_n(t)\sin t\,dt =$

(наприклад, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність:

① $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)\cos t = \cos t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$, міра Лебега множини $\{\frac{\pi}{4}\}$ рівна 0

② $|x_n(t)\cos t| \le \cos t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ і $\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 1 < +\infty$

і

① $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)\sin t = -\sin t,\ t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$, міра Лебега множини $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$ рівна 0;

② $|x_n(t)\sin t|\le \sin t,\ t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ і $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin t\,dt = 1 < +\infty$)

$$= 5+\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin t\,dt = 5+1+1=7.$$

Отже, ми довели, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=7$. Тепер ми готові довести, що $\|f\|\ge 7$. Для кожного $n\ge 3$ маємо: $\|f\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} \ge f(x_n)$, а тому $\|f\|\ge \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=7$. Отже, ми довели, що $\|f\|\le 7$ і

ст. 10

$\|f\|\ge 7 \Rightarrow \|f\|=7$.

Висновок: $f\in (C[0,\pi])'$ і $\|f\|=7$.

k) Простір $X = C^1[0,1] = \{x:[0,1]\to\mathbb{K} \mid$ для $\forall t\in[0,1]\ \exists x'(t)$ і функція $x'\in C[0,1]\}$ із нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$; функціонал $f(x)=x'(0),\ x\in C^1[0,1]$.

Р-ок Функціонал f лінійний. Дійсно, для $\forall x,y\in C^1[0,1]$ і $\forall$ скалярів α,β маємо: $f(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)'(0) = \alpha x'(0)+\beta y'(0) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.

Функціонал f обмежений. Дійсно, для $\forall x\in C^1[0,1]$ маємо: $|f(x)| = |x'(0)| \le \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le \|x\|$. Отже, функціонал f лінійний і обмежений $\Rightarrow f$ неперервний.

Знайдемо $\|f\|$. Оскільки для $\forall x\in C^1[0,1]$ $|f(x)|\le\|x\|$, то $\|f\|\le 1$. Доведемо, що $\|f\|\ge 1$. Для цього розглянемо послідовність функцій $x_n(t)=e^{-nt},\ t\in[0,1],\ n\ge 1$. Маємо: $x_n'(t) = -ne^{-nt}$, а тому $x_n\in C^1[0,1]$ і

① $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|e^{-nt}| + \max\limits_{t\in[0,1]}|-ne^{-nt}| = 1+n = n+1$;

② $f(x_n) = x_n'(0) = -n$

Тому $\|f\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|-n|}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ для $\forall n\ge 1$, а тому $\|f\| \ge \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

Отже, ми довели, що $\|f\| \le 1$ і $\|f\| \ge 1 \Rightarrow \|f\| = 1$.

Висновок: $f \in (C^1[0,1])'$ і $\|f\| = 1$.

г) Простір $X = C^1[0,1]$ із нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, функціонал $f(x) = x'(0)$, $x \in C^1[0,1]$.

Р-ок: Функціонал f лінійний. Перевірка — самостійно. Функціонал f не є обмеженим. Щоб це довести, розглянемо послідовність функцій $x_n \in C^1[0,1]$, визначених правилом $x_n(t) = e^{-nt}$, $t \in [0,1]$, $n \ge 1$. Маємо:

ст.11

① $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |e^{-nt}| = 1$,

② $x_n'(t) = -ne^{-nt} \Rightarrow f(x_n) = x_n'(0) = -n$, а тому

$\frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{|-n|}{1} = n$ може бути як завгодно великим.

Отже, f не є обмеженим $\Rightarrow f$ не є неперервним (оскільки f лінійний).

Висновок: f лінійний, але не неперервний.

Домашнє завдання

Задача 1 Нехай X — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Задано функціонал $f: X \to \mathbb{K}$. Перевірити, чи є f лінійним, чи є f неперервним. Якщо f — неперервний лінійний функціонал, то знайти за означенням $\|f\|$.

① $f(x) = 2x(\frac{1}{2}) - 3x(1) + 7x(2)$, $x \in C[0,3] = X$.

② $f(x) = c_1 x(t_1) + \ldots + c_n x(t_n)$, де $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_n$ — попарно різні точки із відрізка $[a,b]$, $x \in C[a,b] = X$.

③ $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(\frac{1}{n})$, $x \in C[0,1] = X$

④ $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} x(\frac{1}{n})$, $x \in C[0,1] = X$.

⑤ $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x(t_n)$, де $c_1, c_2, c_3, \ldots \in \mathbb{R}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$, $t_1, t_2, t_3, \ldots$ — попарно різні точки із відрізка $[a,b]$, $x \in C[a,b] = X$ [зауваження: спочатку доведіть, що функціонал f коректно визначений].

⑥ $f(x)=\int\limits_a^b \sin x(t)\,dt$, $x\in C[a,b]=X$.

⑦ $f(x)=\int\limits_a^b \operatorname{arctg} x(t)\,dt$, $x\in C[a,b]=X$.

⑧ $f(x)=\int\limits_a^b \varphi(x(t))\,dt$, де функція $\varphi\in C(\mathbb{R})$, $x\in C[a,b]=X$.

⑨ $f(x)=\int\limits_0^1 x(t^2)\,dt$, $x\in C[0,1]=X$.

⑩ $f(x)=\int\limits_0^1 t^2x(t)\,dt-\int\limits_1^2 t^3x(t)\,dt-5x(\frac{1}{2})+2x(\frac{3}{2})$,

$x\in C[0,2]=X$.

⑪ $X=C^1[0,1]$ із нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$,

функціонал $f(x)=x'(0)+x(1)$, $x\in C^1[0,1]$.

⑫ $X=C^2[0,1]$ із нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|+$

$+\max\limits_{t\in[0,1]}|x''(t)|$, функціонал $f(x)=x(\frac{1}{3})+x'(\frac{1}{2})+x''(0)$,

$x\in C^2[0,1]$.

ст. 12

⑬ $X=C^1[0,1]$ із нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$,

функціонал $f(x)=\int\limits_0^1 x'(t)\sin\pi t\,dt$, $x\in C^1[0,1]$.

Вказівка: використайте формулу інтегрування частинами і те, що лінійна множина $C^1[0,1]$ щільна в $C[0,1]$.