Практичне заняття №5: Рівності і нерівності в просторах із скалярним добутком.

Задача 1 Нехай H — простір із скалярним добутком. Довести нерівність Коші-Буняковського $|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$, $x,y \in H$. Показати, що рівність досягається $\Leftrightarrow$ x і y лінійно залежні $\Leftrightarrow$ $x=0$ або $y=\lambda x$ для деякого скаляра λ.

Задача 2 Нехай H — простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Довести, що $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, $x\in H$ є нормою на H.

Задача 3 Нехай H — простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Нехай $x,y\in H$. Довести, що

$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \Leftrightarrow x=0$ або $y=\lambda x$ для деякого $\lambda \ge 0$.

Задача 4 а) Нехай H — дійсний простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Довести, що

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right),\ x,y\in H.$$

ст. 1

б) Нехай H — комплексний простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Довести, що

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right),\ x,y\in H.$$

Задача 5 Нехай H — комплексний простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Довести:

а) $$(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|x+e^{i\frac{2\pi k}{N}}y\|^2\cdot e^{i\frac{2\pi k}{N}},\ N\ge 3,\ x,y\in H.$$

Зауваження: При $N=4$ одержимо поляризаційну тотожність із задачі 4, пункт б.

б) $$(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^2 e^{i\theta}\,d\theta,\ x,y\in H.$$ Довести цю рівність двома способами — безпосередньо і вивести із пункту а).

Задача 6 Нехай H — простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Довести рівність паралелограма $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, $x,y\in H$.

Задача 7* Довести наступну теорему Жордана-фон Неймана: Нехай X — нормований лінійний простір (над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$) із нормою $\|\cdot\|$. Норма $\|\cdot\|$ породжується деяким скалярним добутком $\Leftrightarrow$ для $\forall$ двох елементів $x,y\in X$

виконується рівність паралелограма $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

Вказівка: Визначте $(\cdot,\cdot)$ так, як це зроблено в задачі 4 і доведіть, що $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток, який породжує $\|\cdot\|$.

Задача 8 а) Доведіть, що стандартна норма простору $C[0,1]$ не породжується скалярним добутком.

б) Доведіть, що стандартні норми просторів ℓ_p, $p\in[1,2)\cup(2,+\infty)$ і c_0 не породжуються скалярним добутком.

в) Доведіть, що стандартні норми просторів $L_p[0,1]$, $p\in[1,2)\cup(2,+\infty)$ не породжуються скалярним добутком.

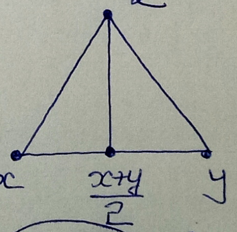
Задача 9 а) Нехай H – простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ – відповідна норма. Нехай $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in H$. Довести, що
$$\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1}\|\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_nx_n\|^2=\|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2.$$

б*) Використовуючи пункт а), довести, що простори ℓ_p, $p\in[1,2)\cup(2,+\infty)$ і c_0 не ізоморфні ℓ_2.

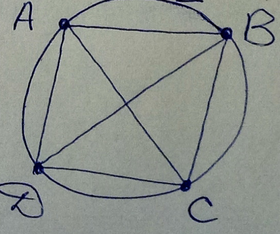
ст2

Вказівка а) Використайте метод математичної індукції і рівність паралелограма.

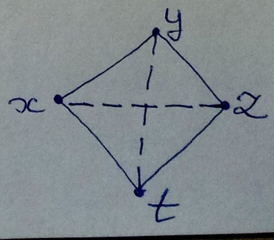
Задача 10 В просторі H із скалярним добутком довести тотожність Апполонія:
$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\|z-\frac{x+y}{2}\|^2,\quad x,y,z\in H$$



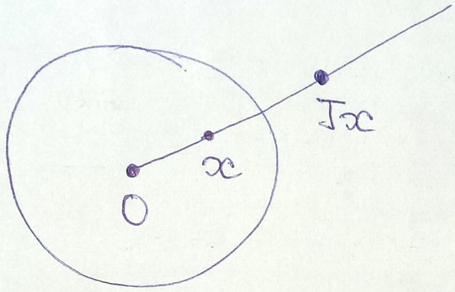
Задача 11 а) Якщо $ABCD$ – вписаний 4-кутник на площині, то $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$. Доведіть це (теорема Птолемея)



б*) В просторі H із скалярним добутком довести нерівність Птолемея:
$$\|x-z\|\cdot\|y-t\|\le\|x-y\|\cdot\|z-t\|+\|y-z\|\cdot\|x-t\|,$$
$x,y,z,t\in H$.



Вказівка б) Розглянемо інверсію відносно одиничної сфери в просторі H, тобто відображення $J: H\setminus\{0\} \to H\setminus\{0\}$, $Jx = \frac{x}{\|x\|^2}$, $x \neq 0$. Перевірте, що $\|Jx - Jy\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $x, y \neq 0$.



$\|Jx\| \cdot \|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|^2} \cdot \|x\| = 1$.

Задача 12 В просторі H із скалярним добутком довести тотожність Лагранжа:

$$\| \|x\|y - \|y\|x \|^2 = 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \operatorname{Re}(x,y), \quad x, y \in H.$$

За допомогою цієї тотожності розв'яжіть задачі 1, 3.

Задача 13 а) Нехай H — дійсний простір із скалярним добутком, $x, y \in H$. Довести, що $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

б) Нехай H — комплексний простір із скалярним добутком, $x, y \in H$. Довести, що $x \perp y \Leftrightarrow \|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Задача 14 Нехай H — простір із скалярним добутком, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно ортогональні елементи простору H. Довести, що $\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.

Задача 15 Нехай H — простір із скалярним добутком, $x_1, \ldots, x_n$ — попарно ортогональні, ненульові елементи простору H. Довести, що $x_1, \ldots, x_n$ лінійно незалежні.

Задача 16 Нехай $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — ортогональна система векторів у гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається $\Leftrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$.

Вказівка: використайте задачу 14.

Задача 17 Нехай H — простір із скалярним добутком, $\{x_n \mid n \geq 1\}$ і $\{y_n \mid n \geq 1\}$ — дві послідовності елементів простору H, такі, що $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $n \geq 1$. Довести, що:

а) $(x_n, y_n) \to 1, n \to \infty \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0, n \to \infty$

б) $\|x_n + y_n\| \to 2, n \to \infty \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0, n \to \infty$

в) $\|x_n - y_n\| \to 0, n \to \infty \Rightarrow \|x_n + y_n\| \to 2, n \to \infty$.

Задача 18 Нехай H — дійсний або комплексний простір із скалярним добутком, $x_1, \dots, x_n \in H$. Довести, що

$$\sum_{i<j<k} \|x_i+x_j+x_k\|^2 = a \sum_{i<j} \|x_i+x_j\|^2 + b \sum_i \|x_i\|^2,$$ де сталі $a=a(n)$ і $b=b(n)$ залежать лише від n. Знайти ці сталі.

Задача 19** Знайти всі комплексні числа a, для яких існує комплексний простір із скалярним добутком H і послідовність векторів $\{v_n | n \geq 1\}$ із H така, що $\|v_n\|=1$, $n \geq 1$ і $(v_m, v_n) = a$ для всіх $m<n$.

ст.4

Задача 20* Нехай H — нескінченновимірний простір із скалярним добутком (над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). Довести, що довільна відкрита куля в H радіуса 2,42 містить нескінченно багато попарно неперетинних відкритих куль радіуса 1.

Задача 21* Нехай H — нескінченновимірний простір із скалярним добутком (над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). Нехай $\mathcal{B}$ — борельова σ-алгебра підмножин H, тобто σ-алгебра, породжена класом відкритих в H множин.
Припустимо, що μ — міра на $\mathcal{B}$, така, що
1.) μ інваріантна відносно зсуву (тобто для довільної множини $A \in \mathcal{B}$ і $\forall x \in H$ $\mu(A+x) = \mu(A)$);
2) значення міри μ довільної відкритої кулі скінченне.
Довести, що $\mu = 0$ (тобто що $\mu(A)=0$ для $\forall A \in \mathcal{B}$).
Вказівка: використайте задачу 20.