ТЕМА: Простори із скалярним добутком

Скалярний добуток в $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

Задача 1 З'ясувати, чи визначає скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$ функція $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $\varphi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

b) $\varphi(x,y) = x_1 + y_1$

c) $\varphi(x,y) = x_2 y_2$

d) $\varphi(x,y) = 3x_1 x_2 + 2y_1 y_2$

e) $\varphi(x,y) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2$

f) $\varphi(x,y) = 3x_1 y_1 - 2x_2 y_2$

g) $\varphi(x,y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2$

h) $\varphi(x,y) = \sqrt{|x_1 y_1|} + \sqrt{|x_2 y_2|}$

i) $\varphi(x,y) = (x_1 y_1)^2 + (x_2 y_2)^2$

j) $\varphi(x,y) = a x_1 y_1 + b x_2 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_2$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$,

тут $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — елементи $\mathbb{R}^2$.

Р-ок a) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку:

① $\varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ і $= 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$. Отже, перша аксіома виконується

② $\varphi(y,x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \varphi(x,y)$. Отже, друга аксіома виконується.

③ Треба перевірити, чи правда, що для $\forall y \in \mathbb{R}^2$ функція $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ лінійна. Запишемо

$$\varphi(\alpha x + \beta \tilde{x}, y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta \tilde{x}_1 \\ \alpha x_2 + \beta \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (\alpha x_1 + \beta \tilde{x}_1) y_1 + (\alpha x_2 + \beta \tilde{x}_2) y_2 =$$

$$= \alpha x_1 y_1 + \beta \tilde{x}_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \beta \tilde{x}_2 y_2 = \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2) + \beta(\tilde{x}_1 y_1 + \tilde{x}_2 y_2) =$$

$= \alpha \varphi(x,y) + \beta \varphi(\tilde{x}, y)$. Отже, третя аксіома скалярного добутку теж виконується.

Висновок: φ задає скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$.

b) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

① $\varphi(x,x)=x_1+x_1=2x_1$. Чи правда, що $\varphi(x,x)\geq 0$ для $\forall x\in\mathbb{R}^2$? Звичайно, ні. Наприклад, для $x=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ маємо $\varphi(x,x)=-2<0$. Отже, перша аксіома скалярного добутка не виконується.

ст. 2

Висновок: φ — не скалярний добуток на $\mathbb{R}^2$.

c) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

① $\varphi(x,x)=x_2^2$. Зрозуміло, що $\varphi(x,x)\geq 0$ для $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Тепер потрібно зрозуміти, чи правда, що $\varphi(x,x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=\vec{0}$? Це неправда, бо для $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ маємо $\varphi(x,x)=0$. Отже, перша аксіома скалярного добутка не виконується.

Висновок: φ — не скалярний добуток на $\mathbb{R}^2$.

h) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

① $\varphi(x,x)=\sqrt{|x_1^2|}+\sqrt{|x_2^2|}=|x_1|+|x_2|\geq 0$ і $=0 \Longleftrightarrow x=\vec{0}$. Отже, перша аксіома скалярного добутка виконується.

② $\varphi(y,x)=\sqrt{|y_1x_1|}+\sqrt{|y_2x_2|}=\sqrt{|x_1y_1|}+\sqrt{|x_2y_2|}=\varphi(x,y)\Rightarrow$ друга аксіома скалярного добутка виконується

③ Треба перевірити, чи правда, що для $\forall y\in\mathbb{R}^2$ функція $\mathbb{R}^2\ni x\longmapsto\varphi(x,y)\in\mathbb{R}$ лінійна? Дивлячись на вигляд φ, одразу хочеться сказати, що це неправда. Доведемо це акуратно. Нехай $y=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ і $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тоді $\varphi(x,y)=1$, $\varphi(-x,y)=1$, а тому $\varphi(-x,y)\neq-\varphi(x,y)$. Таким чином, третя аксіома скалярного добутка не виконується.

Висновок: φ — не скалярний добуток на $\mathbb{R}^2$.

Інші пункти — самостійно.

Задача 2 Описати всі скалярні добутки в просторі $\mathbb{R}^2$.

Р-ок: Припустимо, що $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в просторі $\mathbb{R}^2$. Означимо базисні вектори $e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тоді для довільних $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ і $y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ маємо:

$(x,y) = (x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = (x_1e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + (x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) =$
$= (x_1e_1, y_1e_1) + (x_1e_1, y_2e_2) + (x_2e_2, y_1e_1) + (x_2e_2, y_2e_2) =$
$= x_1y_1(e_1,e_1) + x_1y_2(e_1,e_2) + x_2y_1(e_2,e_1) + x_2y_2(e_2,e_2)$.

Позначимо $a = (e_1,e_1)$; $b = (e_1,e_2) = (e_2,e_1)$; $c = (e_2,e_2)$. Це якісь дійсні числа. Тоді ми бачимо, що

$(x,y) = a x_1y_1 + b x_2y_1 + b x_1y_2 + c x_2y_2$ (*).

ст. 3

Таким чином, ми показали, що кожен скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$ має вигляд (*) для деяких дійсних чисел a, b, c. Нам залишається зрозуміти, для яких a, b, c формула (*) дійсно визначає скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$. Перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

① $(x,x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Нам потрібно, щоб $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ було ≥ 0 для $\forall x \in \mathbb{R}^2$ і $=0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \vec{0}$. Ці умови виконуються $\Longleftrightarrow$ квадратична форма, породжена матрицею $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ додатно визначена $\Longleftrightarrow$ симетрична матриця $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ додатно визначена $\Longleftrightarrow$ (згадуємо критерій Сильвестра) $\begin{cases}\Delta_1 = a > 0\\ \Delta_2 = ac - b^2 > 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a > 0\\ ac > b^2\end{cases}$.

Таким чином, перша аксіома скалярного добутка виконується $\Longleftrightarrow \begin{cases}a > 0\\ ac > b^2\end{cases}$.

② $(y,x) = ay_1x_1 + by_2x_1 + by_1x_2 + cy_2x_2 =$
$= ax_1y_1 + bx_2y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_2 = (x,y) \Rightarrow$ друга аксіома виконується.

③ Розглянемо $(\alpha x+\beta\tilde{x}, y) = \left(\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta\tilde{x}_1\\ \alpha x_2+\beta\tilde{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right) =$

$= a(\alpha x_1+\beta\tilde{x}_1)y_1 + b(\alpha x_2+\beta\tilde{x}_2)y_1 + b(\alpha x_1+\beta\tilde{x}_1)y_2 +$

$+ c(\alpha x_2+\beta\tilde{x}_2)y_2 = a(\alpha x_1 y_1+\beta\tilde{x}_1 y_1) + b(\alpha x_2 y_1+\beta\tilde{x}_2 y_1) +$

$+ b(\alpha x_1 y_2+\beta\tilde{x}_1 y_2) + c(\alpha x_2 y_2+\beta\tilde{x}_2 y_2) =$ | збираємо окремо перші доданки, і виносимо α за дужки; збираємо окремо другі доданки, і виносимо β за дужки |

$= \alpha(a x_1 y_1 + b x_2 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_2) +$

$+ \beta(a\tilde{x}_1 y_1 + b\tilde{x}_2 y_1 + b\tilde{x}_1 y_2 + c\tilde{x}_2 y_2) =$

$= \alpha(x,y) + \beta(\tilde{x},y) \Rightarrow$ третя аксіома виконується.

Зауваження: третю аксіому можна перевірити простіше. А саме, при фіксованому $y\in\mathbb{R}^2$ функція $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}$ має вигляд $x \mapsto k_1 x_1 + k_2 x_2$ для деяких дійсних чисел k_1, k_2, а така функція, очевидно, є лінійною $\Rightarrow$ третя аксіома виконується.

Висновок 1: формула (*) задає скалярний добуток в $\mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} a>0 \\ ac>b^2 \end{cases}$.

Висновок 2: загальний вигляд скалярного добутку в $\mathbb{R}^2$ — $(x,y) = a x_1 y_1 + b x_2 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_2$, $x,y\in\mathbb{R}^2$, де a,b,c — дійсні числа, що задовольняють умови $\begin{cases} a>0 \\ ac>b^2. \end{cases}$

Зауваження: Зараз ми маємо відображення, яке кожній трійці дійсних чисел (a,b,c), які задовольняють умови $\begin{cases} a>0 \\ ac>b^2 \end{cases}$ співставляє скалярний добуток $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{(a,b,c)}$ на $\mathbb{R}^2$. Оскільки $(e_1,e_1)_{(a,b,c)} = a$; $(e_1,e_2)_{(a,b,c)} = b$; $(e_2,e_2)_{(a,b,c)} = c$, то різним трійкам (a,b,c) відповідають різні скалярні добутки. Тому існує взаємно-однозначна відповідність між скалярними добутками в просторі $\mathbb{R}^2$ і трійками дійсних чисел (a,b,c), які задовольняють умови $\begin{cases} a>0 \\ ac>b^2. \end{cases}$

Зауваження Скалярний добуток, що відповідає трійці (a,b,c), можна записати наступним чином. Позначимо $(\cdot,\cdot)_0$ стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$, тобто $(x,y)_0=x_1y_1+x_2y_2$. Тоді

$$(x,y)_{(a,b,c)}=ax_1y_1+bx_2y_1+bx_1y_2+cx_2y_2=$$

$$=(ax_1+bx_2)y_1+(bx_1+cx_2)y_2=\left(\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\bx_1+cx_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)_0=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)_0=(Ax,y)_0, \text{ де } A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}.$$ Отже,

$(x,y)_{(a,b,c)}=(Ax,y)_0$. Таким, попереднє зауваження показує, що існує взаємно-однозначна відповідність між скалярними добутками в просторі $\mathbb{R}^2$ і додатно визначеними симетричними дійсними матрицями порядку 2.

Задача 3 Описати всі скалярні добутки в просторі $\mathbb{R}^n$.

Вказівка: Покажіть, що існує взаємно-однозначна відповідність між скалярними добутками в просторі $\mathbb{R}^n$ і додатно визначеними симетричними дійсними матрицями розміру $n\times n$.

Задача 4 Описати всі скалярні добутки в просторі $\mathbb{C}^n$.

Вказівка: Покажіть, що існує взаємно-однозначна відповідність між скалярними добутками в просторі $\mathbb{C}^n$ і додатно визначеними ермітово-симетричними комплексними матрицями розміру $n\times n$.

Задача 5* Нехай V-скінченновимірний лінійний простір (над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$) і $(\cdot,\cdot)_1$ і $(\cdot,\cdot)_2$ — два скалярні добутки в V. Довести, що існує базис $e_1,..,e_n$ простору V такий, що цей базис ортонормований відносно $(\cdot,\cdot)_1$ і ортогональний відносно $(\cdot,\cdot)_2$.

Задача 6 Розглянемо дійсний простір
$$l_2=\{x=(x_1,x_2,x_3,\ldots) \mid x_n\in\mathbb{R}, n\geq 1 \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<+\infty\}.$$
Означимо $(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_ny_n$, $x,y\in l_2$.

а) Довести, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене

б) Довести, що $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в l_2

в*) Чи буде простір l_2 гільбертовим відносно $(\cdot,\cdot)$?

Р-ок. а) Нам потрібно перевірити, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_ny_n$ збігається для $\forall x,y\in l_2$. Для цього досить довести, що цей ряд збігається абсолютно. Згадаємо, що для рядів з невід'ємними членами можна застосовувати ознаки порівняння, зокрема, якщо „більший" ряд збігається, то „менший" теж збігається. Маємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}x_ny_n\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|x_n|\cdot|y_n|\leq$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot|y_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(|x_n|^2+|y_n|^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2+y_n^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2<+\infty \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}x_ny_n\right|$$
збігається $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_ny_n$ теж збігається $\Longrightarrow$ відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене.

б) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку:

1) $(x,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n^2\geq 0$ для всіх $x\in l_2$ і $=0 \Longleftrightarrow x=(0,0,0,\ldots)$. Отже, перша аксіома виконується.

② $(y,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}y_n x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n y_n=(x,y)$, $x,y\in l_2 \Rightarrow$ друга аксіома виконується

③ $(\alpha x+\beta\tilde{x},y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha x_n+\beta\tilde{x}_n)y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\alpha x_n y_n+\frac{1}{n}\beta\tilde{x}_n y_n\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha x_n y_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\beta\tilde{x}_n y_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n y_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{x}_n y_n=$

$=\alpha(x,y)+\beta(\tilde{x},y) \Rightarrow$ третя аксіома виконується.

Отже, $(\cdot;\cdot)$ — скалярний добуток на l_2.

ст.7

б) Доведемо, що простір l_2 не буде гільбертовим відносно $(\cdot;\cdot)$. Для цього потрібно показати, що простір l_2 не є повним відносно $\|\cdot\|$, породженої $(\cdot;\cdot)$. Нагадаємо, що ~~простір назив~~ метричний простір називається повним, якщо кожна фундаментальна послідовність в цьому просторі збігається до деякого елемента із цього простору. Таким чином, якщо ми хочемо довести, що l_2 із $(\cdot;\cdot)$ не є повним, нам потрібно показати, що існує послідовність $\{x^{(k)} \mid k\geq 1\}$ елементів простору l_2, така, що:

1) $\{x^{(k)} \mid k\geq 1\}$ фундаментальна відносно $\|\cdot\|$;
2) $\{x^{(k)} \mid k\geq 1\}$ не є збіжною в l_2 із $\|\cdot\|$.

Означимо $x^{(k)}=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k}},0,0,0,\dots\right)$, $k\geq 1$.

Очевидно, що $x^{(k)}\in l_2$, $k\geq 1$. Доведемо, що $\{x^{(k)} \mid k\geq 1\}$ є фундаментальною відносно $\|\cdot\|$. Спочатку запишемо, як виглядає $\|\cdot\|$. Маємо:

$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n^2}$, $x\in l_2$. Для довільних $k\geq 1$ і $p\geq 1$ маємо: $\|x^{(k)}-x^{(k+p)}\|=\left\|\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k}},0,0,0,\dots\right)-\right.$

$\left.-\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k}},\frac{1}{\sqrt{k+1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k+p}},0,0,0,\dots\right)\right\|=$

$=\left\|-(\underbrace{0,0,0,\dots,0}_{k\text{ нулів}},\frac{1}{\sqrt{k+1}},\frac{1}{\sqrt{k+2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k+p}},0,0,0,\dots)\right\|=$

$=\left\|\left(0,0,0,\dots,0,\frac{1}{\sqrt{k+1}},\frac{1}{\sqrt{k+2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{k+p}},0,0,0,\dots\right)\right\|=$

$$=\sqrt{\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}\cdot\frac{1}{k+p}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+p)^2}}<\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, а $\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots$ — це „хвіст" цього ряду, а тому цей хвіст $\to 0$ при $k\to\infty$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall k\geq N;\ \forall p\geq 1$ $\|x^{(k)}-x^{(k+p)}\|<\varepsilon \Rightarrow \{x^{(k)}\,|\,k\geq 1\}$ фундаментальна відносно $\|\cdot\|$.

Нам залишається довести, що $\{x^{(k)}\,|\,k\geq 1\}$ не є збіжною в l_2 із $\|\cdot\|$. Припустимо, що $x^{(k)}\to$ до деякого елемента $x\in l_2$ при $k\to\infty$ в $(l_2,\|\cdot\|)$. Це означає, що $\|x^{(k)}-x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x_n^{(k)}-x_n)^2}\to 0,\ k\to\infty$.

<u>Маємо</u>: $|x_1^{(k)}-x_1|\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x_n^{(k)}-x_n)^2}\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow$

$|x_1^{(k)}-x_1|\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow x_1^{(k)}\to x_1,\ k\to\infty\Rightarrow$

$x_1=\lim\limits_{k\to\infty}x_1^{(k)}=1.$

<u>Маємо</u>: $\frac{1}{\sqrt{2}}|x_2^{(k)}-x_2|\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x_n^{(k)}-x_n)^2}\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow$

$|x_2^{(k)}-x_2|\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow x_2^{(k)}\to x_2,\ k\to\infty\Rightarrow$

$x_2=\lim\limits_{k\to\infty}x_2^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

і т.д. ....

<u>Маємо</u> $\frac{1}{\sqrt{m}}|x_m^{(k)}-x_m|\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x_n^{(k)}-x_n)^2}\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow$

$|x_m^{(k)}-x_m|\to 0,\ k\to\infty\Rightarrow x_m^{(k)}\to x_m,\ k\to\infty\Rightarrow$

$x_m=\lim\limits_{k\to\infty}x_m^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{m}}$

і т.д. ....

Отже, виходить, що $x=(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots)$. Але ця послідовність $\notin l_2$, бо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$. Одержали суперечність $\Rightarrow$ послідовність $\{x^{(k)}\,|\,k\geq 1\}$ не є збіжною в l_2 із $\|\cdot\|$.

Висновок: ми показали, що послідовність

$x^{(k)}=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{k}},0,0,0,\ldots\right), k\geq 1$:

ст. 9

1) фундаментальна відносно $\|\cdot\|$;

2) не є збіжною в l_2 із $\|\cdot\|$.

Тому простір l_2 не є гільбертовим відносно $(\cdot,\cdot)$.

Задача 7. Розглянемо дійсний простір

$l_2=\{x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\mid x_n\in\mathbb{R}, n\geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2<+\infty\}$.

Нехай $\{\alpha_n \mid n\geq 1\}$ — обмежена послідовність додатніх чисел. Означимо $(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n y_n$, $x,y\in l_2$.

а) Довести, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене

б) Довести, що $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в l_2

в*) Чи є простір l_2 гільбертовим відносно $(\cdot,\cdot)$?

Задача 8. Нехай $w=(w_1,w_2,w_3,\ldots)$ — послідовність додатніх чисел. Позначимо $l_{2,w}$ множину всіх послідовностей $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ дійсних чисел, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2<+\infty$.

a) Довести, що простір $l_{2,w}$ лінійний

b) Довести, що відображення $(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n$, $x,y\in l_{2,w}$ коректно визначене

c) Довести, що $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $l_{2,w}$

d) Довести, що простір $l_{2,w}$ із $(\cdot,\cdot)$ гільбертів

e) З'ясувати, для яких w $l_{2,w}\subset l_2$

f) З'ясувати, для яких w $l_2\subset l_{2,w}$

Р-ок. a) Лінійність простору $l_{2,w}$ випливає із таких двох зауважень:

1.) Якщо $x,\tilde{x}\in l_{2,w}$, то $x+\tilde{x}\in l_{2,w}$. Дійсно,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(x_n+\tilde{x}_n)^2\leq$ | користуємось допоміжною нерівністю $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ |

$\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n\cdot 2(x_n^2+\tilde{x}_n^2)=2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(\tilde{x}_n)^2\right)<+\infty\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(x_n+\tilde{x}_n)^2<+\infty\Rightarrow x+\tilde{x}\in l_{2,w}$

2.) Якщо $x\in l_{2,w}$, а $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\lambda x\in l_{2,w}$.

Дійсно, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(\lambda x_n)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 < +\infty \Rightarrow \lambda x \in l_{2,w}$.

b) Нам потрібно перевірити, що для $\forall x, y \in l_{2,w}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n$ збігається. Для цього досить довести, що він збігається абсолютно. Згадаємо, що для рядів з невід'ємними членами є ознаки порівняння; зокрема, якщо „більший" ряд збігається, то „менший" теж збігається. Маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n| \cdot |y_n| \le$ $\le \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x_n^2 + y_n^2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 + \right.$ $\left. + \sum_{n=1}^{\infty} w_n y_n^2\right) < +\infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n y_n|$ збігається $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n$ теж збігається.

c) Перевіримо аксіоми скалярного добутку:

1.) $(x,x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 \ge 0$ і $= 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0,\dots)$. Отже, перша аксіома виконується.

2.) $(y,x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n y_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n = (x,y)$ для $\forall x, y \in l_{2,w}$. Отже, друга аксіома виконується

3) $(\alpha x + \beta \tilde{x}, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\alpha x_n + \beta \tilde{x}_n) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (w_n \alpha \cdot x_n y_n +$ $+ w_n \cdot \beta \tilde{x}_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot w_n x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta \cdot w_n \tilde{x}_n y_n =$ $= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n \tilde{x}_n y_n = \alpha(x,y) + \beta(\tilde{x}, y)$ для $\forall x, \tilde{x}, y \in l_{2,w}$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Отже, третя аксіома виконується.

Висновок: $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток на $l_{2,w}$.

d) Нам потрібно перевірити, що простір $l_{2,w}$ повний відносно норми, породженої скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Це можна зробити як мінімум трьома способами:

1 спосіб Безпосередньо. Треба розглянути довільну послідовність $\{x^{(k)} | k \ge 1\}$ елементів $l_{2,w}$, яка фундаментальна в $l_{2,w}$, і довести, що $x^{(k)} \to$ до деякого елемента $x \in l_{2,w}$ при $k \to \infty$. Це залишається Вам як вправа.

2 спосіб Із лекцій ми знаємо, що простір l_2 із стандартним скалярним добутком гільбертів. Використовуючи цей факт, можна довести, що і простір $l_{2,w}$ гільбертів. Покажемо, як це зробити. Визначимо відображення $J: l_{2,w} \to l_2$ так:

$$Jx = (\sqrt{w_1}x_1, \sqrt{w_2}x_2, \sqrt{w_3}x_3, \dots), \ x \in l_{2,w}.$$

Відображення J визначено коректно, бо $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{w_n}x_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 < +\infty$, $x \in l_{2,w}$. Це відображення має такі властивості:

ст. 11

1) J-лінійне. Дійсно, $J(\alpha x + \beta \tilde{x}) =$

$= (\sqrt{w_1}(\alpha x_1 + \beta \tilde{x}_1), \sqrt{w_2}(\alpha x_2 + \beta \tilde{x}_2), \dots) =$

$= (\sqrt{w_1}\alpha x_1 + \sqrt{w_1}\beta \tilde{x}_1, \sqrt{w_2}\alpha x_2 + \sqrt{w_2}\beta \tilde{x}_2, \dots) =$

$= (\alpha\sqrt{w_1}x_1, \alpha\sqrt{w_2}x_2, \dots) + (\beta\sqrt{w_1}\tilde{x}_1, \beta\sqrt{w_2}\tilde{x}_2, \dots) =$

$= \alpha(\sqrt{w_1}x_1, \sqrt{w_2}x_2, \dots) + \beta(\sqrt{w_1}\tilde{x}_1, \sqrt{w_2}\tilde{x}_2, \dots) =$

$= \alpha J(x) + \beta J(\tilde{x})$

2) J — бієкція. Дійсно, $\operatorname{Ker}(J) = \{0\} \Rightarrow J$ ін'єктивне. Доведемо, що J сюр'єктивне. Для довільного елемента $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_2$ розглянемо $x = \left(\frac{y_1}{\sqrt{w_1}}, \frac{y_2}{\sqrt{w_2}}, \frac{y_3}{\sqrt{w_3}}, \dots\right)$. Цей $x \in l_{2,w}$ бо $\sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot \left(\frac{y_n}{\sqrt{w_n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < +\infty$ і

$Jx = \left(\sqrt{w_1}\frac{y_1}{\sqrt{w_1}}, \sqrt{w_2}\frac{y_2}{\sqrt{w_2}}, \dots\right) = (y_1, y_2, \dots) = y$. Отже,

$\left.\begin{array}{l} J\text{-сюр'єктивне} \\ J\text{-ін'єктивне} \end{array}\right\} \Rightarrow J$ — бієкція

3) $\|Jx\|_{l_2} = \sqrt{(\sqrt{w_1}x_1)^2 + (\sqrt{w_2}x_2)^2 + \dots} = \sqrt{w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + \dots} =$

$= \|x\|_{l_{2,w}}$

Ці три властивості J показують, що J — ізометричний ізоморфізм. Тепер дуже легко можна довести, що простір $l_{2,w}$ гільбертів. Нам потрібно показати, що $\forall$ фундаментальна в $l_{2,w}$ послідовність збігається до деякого елемента $l_{2,w}$. Нехай $\{x^{(k)} | k \geq 1\}$ фундаментальна в $l_{2,w} \Longrightarrow$

$\{Jx^{(k)} \mid k\geq 1\}$ фундаментальна в l_2 (бо $\|Jx^{(k)}-Jx^{(l)}\|_{l_2}=\|J(x^{(k)}-x^{(l)})\|_{l_2}=\|x^{(k)}-x^{(l)}\|_{l_{2,w}}$) $\Rightarrow Jx^{(k)}\to$ до деякого елемента $y\in l_2$ при $k\to\infty$ (бо простір l_2 гільбертів). Оскільки J-біекція, то $\exists!\, x\in l_{2,w}: y=Jx$. Отже, $Jx^{(k)}\to Jx,\ k\to\infty$ в $l_2 \Rightarrow x^{(k)}\to x,\ k\to\infty$ в $l_{2,w}$ (бо $\|x^{(k)}-x\|_{l_{2,w}}=\|Jx^{(k)}-Jx\|_{l_2}\to 0,\ k\to\infty$).

Отже, простір $l_{2,w}$ гільбертів. ст. 12

2 спосіб Вам на лекціях доводили наступний факт: якщо $(T,\mathcal{F},\mu)$ — простір з мірою, то простір $L_2(T,\mathcal{F},\mu)$ гільбертів. Покажемо, що простір $l_{2,w}$ є частковим випадком простору L_2. Нехай множина $T=\{1,2,3,\dots\}=\mathbb{N}$, σ-алгебра $\mathcal{F}=2^{\mathbb{N}}=\{A \mid A\subset\mathbb{N}\}$ — множина всіх підмножин $\mathbb{N}$ (тобто кожна підмножина $\mathbb{N}$ є вимірною), а міра μ визначена за допомогою рівностей

$\mu(\{n\})=w_n,\ n\geq 1$, тобто $\mu(A)=\sum_{n\in A} w_n,\ A\subset\mathbb{N}$.

Вправа Довести, що μ — міра.

Щоб визначити, яким буде простір $L_2(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$, зробимо такі зауваження:

1.) Довільна функція $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ є вимірною (оскільки для $\forall$ борельової множини $A\subset\mathbb{R}$ її прообраз $x^{-1}(A)\in 2^{\mathbb{N}}$);

2) Для довільної функції $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$\int_{\mathbb{N}} x(n)^2\, d\mu(n)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n (x(n))^2$ (акуратне доведення цієї рівності — вправа. Наприклад, можна скористатись означенням інтеграла Лебега для невід'ємних функцій, або ж теоремою про монотонний перехід до границі в інтегралі Лебега).

3) Якщо $x,y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ — дві функції, то $x=y$ μ-майже скрізь $\Leftrightarrow x(n)=y(n)$ для $\forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow x=y$. Це випливає з того, що єдиною множиною міри 0 є $\emptyset$.

Із цих зауважень випливає, що $L_2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} w_n (x(n))^2 < +\infty\}$

Зауваження. В загальному випадку елементами простору $L_2(T, \mathcal{F}, \mu)$ є класи еквівалентності вимірних функцій $x: T \to \mathbb{R}$, для яких $\int_T (x(t))^2 d\mu(t) < +\infty$. При цьому дві функції x і y еквівалентні якщо $x(t) = y(t)$ μ-майже скрізь. В нашому випадку простору $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ зауваження 3) показує, що кожен клас еквівалентності складається з рівно однієї функції. Тому в нашому випадку елементи простору L_2 — це „чесні" функції.

ст. 13

Скалярний добуток в $L_2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ визначається рівністю $(x, y) = \int_{\mathbb{N}} x(n) y(n) d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x(n) y(n)$ (акуратне доведення — вправа; вам допоможе теорема Лебега про мажоровану збіжність під знаком інтеграла).

Нам залишається зазначити, що функція $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — це послідовність дійсних чисел $(x(1), x(2), x(3), \ldots)$. Отже, $L_2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1 \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 < +\infty\} = l_{2,w}$ із $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n y_n$. Отже, простір $l_{2,w}$ із заданим скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ є частковим випадком простору $L_2 \Rightarrow l_{2,w}$ гільбертів.

e) Доведемо, що $l_{2,w} \subset l_2 \iff \inf_{n \geq 1} w_n > 0 \iff \exists \varepsilon > 0: w_n \geq \varepsilon$ для всіх $n \geq 1$. Доведення складається із двох частин.

Спочатку припустимо, що $\inf_{n \geq 1} w_n > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: w_n \geq \varepsilon$ для всіх $n \geq 1$. Доведемо, що $l_{2,w} \subset l_2$. Розглянемо довільний $x \in l_{2,w}$. Нам потрібно показати, що $x \in l_2$. Маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{\varepsilon} x_n^2 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 < +\infty \Rightarrow x \in l_2$. Отже, $l_{2,w} \subset l_2$.

Тепер припустимо, що $\inf\limits_{n\geq 1} w_n = 0$. Доведемо, що $l_{2,w} \not\subset l_2$. Для цього ми наведемо приклад послідовності x, яка належить $l_{2,w}$, але не належить l_2. Оскільки $\inf\limits_{n\geq 1} w_n = 0$, то $\exists$ номер n_1: $w_{n_1} < 1$. Далі, $\exists$ номер $n_2 > n_1$: $w_{n_2} < \frac{1}{4}$. Далі, $\exists$ номер $n_3 > n_2$: $w_{n_3} < \frac{1}{9}$ і т.д.... $\exists$ номер $n_m > n_{m-1}$: $w_{n_m} < \frac{1}{m^2}$, і т.д...... Отже, ми зараз маємо послідовність номерів $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$ таких, що $w_{n_m} < \frac{1}{m^2}$. Розглянемо послідовність

ст. 14

$x = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n_1}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n_2}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n_3}, 0, \ldots)$. Тоді

① $x \in l_{2,w}$, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 = w_{n_1} + w_{n_2} + w_{n_3} + \ldots <$
$< 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2} + \ldots < +\infty$

② $x \notin l_2$, бо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1+1+1+1+\ldots = +\infty$.

Отже, $l_{2,w} \not\subset l_2$.

f) Доведемо, що $l_2 \subset l_{2,w} \Leftrightarrow$ послідовність $\{w_n | n \geq 1\}$ обмежена $\Leftrightarrow \exists C > 0$: $w_n \leq C$ для всіх $n \geq 1$. Доведення складається із двох частин.

Спочатку припустимо, що послідовність $\{w_n | n \geq 1\}$ обмежена $\Rightarrow \exists C > 0$: $w_n \leq C$ для всіх $n \geq 1$. Доведемо, що $l_2 \subset l_{2,w}$. Розглянемо довільний $x \in l_2$. Нам потрібно показати, що $x \in l_{2,w}$. Маємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} C x_n^2 =$
$= C \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \Rightarrow x \in l_{2,w}$. Отже, $l_2 \subset l_{2,w}$.

Тепер припустимо, що послідовність $\{w_n | n \geq 1\}$ не є обмеженою. Доведемо, що $l_2 \not\subset l_{2,w}$. Для цього ми наведемо приклад послідовності x, яка належить l_2, але не належить $l_{2,w}$. Оскільки $\{w_n | n \geq 1\}$ не є обмеженою, то $\exists$ номер n_1: $w_{n_1} > 1$. Далі, $\exists$ номер $n_2 > n_1$: $w_{n_2} > 4$. Далі, $\exists$ номер $n_3 > n_2$: $w_{n_3} > 9$ і т.д.......... $\exists$ номер $n_m > n_{m-1}$: $w_{n_m} > m^2$, і т.д..........

Отже, ми зараз маємо послідовність номерів

$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$ таких, що $w_{n_m} > m^2$. Розглянемо послідовність $x = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n_1}, 0 \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{2}}_{n_2}, 0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{3}}_{n_3}, 0 \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{4}}_{n_4}, 0 \dots)$

Тоді ① $x \in l_2$, бо $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{m^2} + \dots < +\infty$

② $x \notin l_{2,w}$, бо $\sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n^2 = w_{n_1} + w_{n_2} \cdot \frac{1}{4} + w_{n_3} \cdot \frac{1}{9} + \dots \geq$

$\geq 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$

Отже, $l_2 \not\subset l_{2,w}$.

Скалярний добуток в просторах функцій.

Задача 9 Перевірити, чи визначає $(\cdot;\cdot)$ скалярний добуток в $C[a,b]$ (дійсному):

a) $(x,y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$;

b) $(x,y) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} x(t) y(t) dt$;

c) $(x,y) = \int_0^1 t\, x(t) y(t) dt$, $a=0, b=1$;

d) $(x,y) = \int_0^1 |t(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)| x(t) y(t) dt$, $a=0, b=1$;

e*) $(x,y) = \int_a^b w(t) x(t) y(t) dt$, де $w \in C[a,b]$. Описати всі функції w, для яких $(\cdot;\cdot)$ – скалярний добуток в $C[a,b]$.

Р-ок a) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

1.) $(x,x) = \int_a^b x(t)^2 dt$. Очевидно, що $(x,x) \geq 0$, $x \in C[a,b]$.

Також $(x,x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (x(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow$ | подумайте, чому? Важливим є те, що $x \in C[a,b]$ |

$x(t)^2 = 0$ для $\forall t \in [a,b] \Leftrightarrow x(t) = 0$ для $\forall t \in [a,b] \Leftrightarrow x = 0$.

Отже, перша аксіома скалярного добутка виконується.

2) $(y,x) = \int_a^b y(t) x(t) dt = \int_a^b x(t) y(t) dt = (x,y)$, $x, y \in C[a,b]$.

Отже, друга аксіома скалярного добутка виконується.

3.) $(\alpha x + \beta \tilde{x}, y) = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta \tilde{x}(t)) y(t) dt = \int_a^b (\alpha x(t) y(t) + \beta \tilde{x}(t) y(t)) dt$

$= \alpha \int_a^b x(t) y(t) dt + \beta \int_a^b \tilde{x}(t) y(t) dt = \alpha(x,y) + \beta(\tilde{x}, y)$.

Таким чином, $(\alpha x + \beta \tilde{x}, y) = \alpha(x,y) + \beta(\tilde{x}, y)$ для довільних $x, \tilde{x}, y \in C[a,b]$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Отже, третя аксіома скалярного добутку виконується.

Висновок: $(\cdot;\cdot)$ задає скалярний добуток в $C[a,b]$.

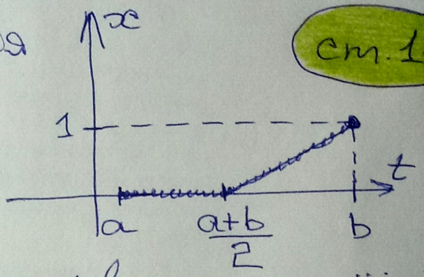
b) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку:

1) $(x,x)=\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}(x(t))^2\,dt$. Зрозуміло, що $(x,x)\geq 0$ для $\forall x\in C[a,b]$. Чи правда, що $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$?

Звичайно, ні. Наприклад, функція

ст. 16

$$x(t)=\begin{cases} 0, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \\ 1, & t=b \\ \text{лінійна на } \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$



належить $C[a,b]$, відмінна від нульової функції, і $(x,x)=\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} 0\,dt=0$. Отже, перша аксіома скалярного добутку не виконується.

Висновок: $(\cdot;\cdot)$ — не скалярний добуток в $C[a,b]$.

c) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку:

подумайте, чому?

1) $(x,x)=\int\limits_0^1 t(x(t))^2\,dt\geq 0$ і $=0 \Leftrightarrow t(x(t))^2=0$ для довільного $t\in[0,1] \Leftrightarrow x(t)=0$ для $\forall t\in(0,1] \Leftrightarrow$ (бо $x\in C[0,1]$) $x(t)=0$ для $\forall t\in[0,1] \Leftrightarrow x=0$.

Отже, перша аксіома скалярного добутку виконується.

2) $(y,x)=\int\limits_0^1 t\,y(t)x(t)\,dt=\int\limits_0^1 t\,x(t)y(t)\,dt=(x,y)$, $x,y\in C[0,1]$.

Отже, друга аксіома скалярного добутку виконується.

3) $(\alpha x+\beta\tilde{x}, y)=\int\limits_0^1 t(\alpha x(t)+\beta\tilde{x}(t))y(t)\,dt=$

$=\int\limits_0^1(\alpha t\,x(t)y(t)+\beta t\,\tilde{x}(t)y(t))\,dt=$ | використовуємо лінійність інтеграла Рімана |

$=\alpha\int\limits_0^1 t\,x(t)y(t)\,dt+\beta\int\limits_0^1 t\,\tilde{x}(t)y(t)\,dt=\alpha(x,y)+\beta(\tilde{x},y)$ для довільних $x,\tilde{x},y\in C[0,1]$ і $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Отже, третя аксіома скалярного добутка виконується.

Висновок: $(\cdot,\cdot)$ задає скалярний добуток в $C[0,1]$.

Пункти d), e) — самостійно.

Задача 10 a) Розглянемо дійсний простір $C^1[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \forall t \in [a,b]\ \exists x'(t)$ і $x' \in C[a,b]\}$. Перевірити, чи є $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt + \int_a^b x'(t)y'(t)dt$, $x,y \in C^1[a,b]$ скалярним добутком в $C^1[a,b]$.

б) Розглянемо комплексний простір $C^1[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \forall t \in [a,b]\ \exists x'(t)$ і $x' \in C[a,b]\}$. Перевірити, чи є $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt + \int_a^b x'(t)\overline{y'(t)}dt$, $x,y \in C^1[a,b]$ скалярним добутком в $C^1[a,b]$.

Задача 11 a) Розглянемо дійсний простір $C^2[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \forall t \in [a,b]\ \exists x''(t)$ і $x'' \in C[a,b]\}$. Перевірити, чи є $(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt + \int_a^b x'(t)y'(t)dt + \int_a^b x''(t)y''(t)dt$, $x,y \in C^2[a,b]$ скалярним добутком в $C^2[a,b]$.

б) Розглянемо комплексний простір $C^2[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \forall t \in [a,b]\ \exists x''(t)$ і $x'' \in C[a,b]\}$. Перевірити, чи є $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt + \int_a^b x'(t)\overline{y'(t)}dt + \int_a^b x''(t)\overline{y''(t)}dt$, $x,y \in C^2[a,b]$ скалярним добутком в $C^2[a,b]$.

Задача 12 a) Розглянемо дійсний простір $BC([0,+\infty)) = \{x : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \mid x$ неперервна на $[0,+\infty)$ і обмежена на $[0,+\infty)\}$. Перевірити, чи є $(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} x(t)y(t)dt$, $x,y \in BC([0,+\infty))$ скалярним добутком в $BC([0,+\infty))$ [зокрема, Вам потрібно перевірити, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене].

б) Розглянемо комплексний простір $BC([0,+\infty)) = \{x : [0,+\infty) \to \mathbb{C} \mid x$ неперервна на $[0,+\infty)$ і обмежена на $[0,+\infty)\}$.

Перевірити, чи є $(x,y)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}x(t)\overline{y(t)}\,dt$, $x,y\in BC([0,+\infty))$ скалярним добутком в $BC([0,+\infty))$ [зокрема, Вам потрібно перевірити, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене].

Задача 13 а) Розглянемо дійсний простір $BC(\mathbb{R})=$ $=\{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid x$ неперервна на $\mathbb{R}$ і обмежена на $\mathbb{R}\}$. Перевірити, чи є $(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)y(t)}{t^2+1}dt$, $x,y\in BC(\mathbb{R})$ скалярним добутком в $BC(\mathbb{R})$ [зокрема, Вам потрібно перевірити, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене].

б) Розглянемо комплексний простір $BC(\mathbb{R})=\{x:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\mid$ x неперервна на $\mathbb{R}$ і обмежена на $\mathbb{R}\}$. Перевірите, чи є $(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt$, $x,y\in BC(\mathbb{R})$ скалярним добутком в $BC(\mathbb{R})$ [зокрема, Вам потрібно перевірити, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене].

Р-ок. Пункт а) — самостійно. Розв'яжемо пункт б).

Спочатку перевіримо, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене. Отже, нам потрібно довести, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt$ збігається для $\forall x,y\in BC(\mathbb{R})$. Для цього досить довести, що цей інтеграл збігається абсолютно. Тому розглянемо $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}\right|dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x(t)|\cdot|y(t)|}{t^2+1}dt$.

Оскільки функція x обмежена на $\mathbb{R}$, то $\exists C_1>0$: $\forall t\in\mathbb{R}$ $|x(t)|\le C_1$. Оскільки функція y обмежена на $\mathbb{R}$, то $\exists C_2>0$: $\forall t\in\mathbb{R}$ $|y(t)|\le C_2$. Тоді для $\forall t\in\mathbb{R}$

$$\frac{|x(t)|\cdot|y(t)|}{t^2+1}\le\frac{C_1C_2}{t^2+1}.$$

Інтеграл від „більшої" функції збігається, бо $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_1C_2}{t^2+1}dt=C_1C_2\operatorname{arctg}t\Big|_{-\infty}^{+\infty}=C_1C_2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$ $=\pi C_1C_2$. Тому інтеграл від „меншої" функції теж збігається [зауваження: важливо, що функції невід'ємні]. Отже, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x(t)|\cdot|y(t)|}{t^2+1}dt$ збігається $\Longrightarrow$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt$ теж збігається $\Longrightarrow$ відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене.

Тепер перевіримо виконання аксіом скалярного добутка:

① $(x,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x(t)|^2}{t^2+1}dt\geq 0$. Також $(x,x)=0 \Longleftrightarrow$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x(t)|^2}{t^2+1}dt=0 \Longleftrightarrow$ | подумайте, чому? Важливо те, що підінтегральна функція неперервна | $\frac{|x(t)|^2}{t^2+1}=0$ для

ст.19

довільного $t\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow x(t)=0$ для $\forall t\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow x=0$.

Отже, перша аксіома скалярного добутка виконується

② $(y,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(t)\overline{x(t)}}{t^2+1}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\left(x(t)\overline{y(t)}\right)}}{t^2+1}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\left(\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}\right)}dt=$

$=\overline{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt}=\overline{(x,y)}$, $x,y\in BC(\mathbb{R})$. Отже, друга аксіома скалярного добутка виконується.

③ $(\alpha x+\beta\tilde{x},y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\alpha x(t)+\beta\tilde{x}(t))\overline{y(t)}}{t^2+1}dt=$

$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha x(t)\overline{y(t)}+\beta\tilde{x}(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha\cdot\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}+\beta\frac{\tilde{x}(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}\right)dt=$

$\Big|$лінійність інтеграла$\Big|=\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt+\beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{x}(t)\overline{y(t)}}{t^2+1}dt=$

$=\alpha(x,y)+\beta(\tilde{x},y)$ для $\forall x,\tilde{x},y\in BC(\mathbb{R})$ і $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Отже, третя аксіома скалярного добутка виконується.

Висновок: $(\cdot,\cdot)$ задає скалярний добуток в $BC(\mathbb{R})$.

Задача 14 Нехай L — комплексна лінійна оболонка множини функцій $\{e^{i\lambda t}=\cos(\lambda t)+i\sin\lambda t, t\in\mathbb{R}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$, тобто множина всіх функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ вигляду $f(t)=c_1e^{i\lambda_1 t}+c_2e^{i\lambda_2 t}+\ldots+c_ne^{i\lambda_n t}$, де $n\in\mathbb{N}$, $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Для двох функцій $f,g\in L$ визначимо $(f,g)=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(t)\overline{g(t)}dt$.

Перевірити, що відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене і задає скалярний добуток в L.

Задача 15** Нехай $\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ – відкритий одиничний круг в $\mathbb{C}$, $A^2(\mathcal{D})=\{f:\mathcal{D}\to\mathbb{C} \mid f$ аналітична в $\mathcal{D}$ і $\int_{\mathcal{D}}|f(x+iy)|^2dxdy<+\infty\}$. Для $f,g\in A^2(\mathcal{D})$ визначимо $(f,g)=\int_{\mathcal{D}}f(x+iy)\overline{g(x+iy)}dxdy$. Довести, що

а) Відображення $(\cdot,\cdot)$ коректно визначене

б) $(\cdot,\cdot)$ задає скалярний добуток в $A^2(\mathcal{D})$

в) Простір $A^2(\mathcal{D})$ із $(\cdot,\cdot)$ гільбертів.

ст. 20