ТЕМА: Еквівалентні норми. Скінченновимірні нормовані лінійні простори.

ст. 1

Озн Нехай X – лінійний простір, $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ – норми на X. Ці норми називаються еквівалентними, якщо $\exists \alpha, \beta > 0: \ \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1$ для $\forall x \in X$.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, $\|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, де $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тоді норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні. Дійсно, маємо:

а) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \le 2\max\{|x_1|, |x_2|\} = 2\|x\|_2$

б) $\|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\} \le |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$.

Отже, $\frac{1}{2}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$, $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ ці норми еквівалентні.

Приклад 2 Нехай $X = C[0,1]$, $\|x\|_1 = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$, $\|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$, $x \in C[0,1]$. Норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ не еквівал. Доведемо це. Припустимо, що ці норми еквівалентні $\Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0: \ \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1$ для $\forall x \in C[0,1]$.

Виберемо $x(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, де n – натуральне число. Зрозуміло, що $x \in C[0,1]$. Обчислимо $\|x\|_1 = \max\limits_{t \in [0,1]} |t^n| = 1$; $\|x\|_2 = \int\limits_0^1 |t^n| dt = \int\limits_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Тоді ми одержимо: $\alpha \cdot 1 \le \frac{1}{n+1} \le \beta \cdot 1 \Rightarrow \alpha \le \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. $\Rightarrow \alpha \le 0$ – протиріччя. Отже, $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ не еквівалентні.

Приклад 3 Нехай $X = C^1[a,b]$, $\|x\|_1 = |x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$; $\|x\|_2 = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$. Норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні. Доведемо це. Очевидно, що $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, $x \in C^1[a,b]$.

Тепер потрібно оцінити $\|x\|_2$ через $\|x\|_1$.

Для $\forall t \in [a,b]$ за формулою Ньютона-Лейбніца маємо: $\int\limits_a^t x'(s)ds = x(t) - x(a) \Rightarrow x(t) = x(a) + \int\limits_a^t x'(s)ds \Rightarrow$

$|x(t)| = |x(a) + \int\limits_a^t x'(s)ds| \le |x(a)| + |\int\limits_a^t x'(s)ds| \le$

$$\leq |x(a)| + \int_a^t |x'(s)|\,ds \leq |x(a)| + \int_a^b |x'(s)|\,ds \leq$$

$$\leq |x(a)| + (b-a)\max_{u\in[a,b]}|x'(u)| \cancel{= |x(a)| + (b-a)\max_{t\in[a,b]}|x'(t)|}$$

Отже, ми показали, що

$$|x(t)| \leq |x(a)| + (b-a)\max_{u\in[a,b]}|x'(u)| \Rightarrow$$

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)| \leq |x(a)| + (b-a)\max_{u\in[a,b]}|x'(u)| \Rightarrow$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)| \leq$$

$$\leq |x(a)| + (b-a)\max_{u\in[a,b]}|x'(u)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)| =$$

$$= |x(a)| + (b-a+1)\cdot\max_{t\in[a,b]}|x'(t)| \leq$$

$$\leq (b-a+1)\left(|x(a)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|\right) = (b-a+1)\|x\|_1 .$$

Таким чином, $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq (b-a+1)\|x\|_1$, $x\in C^1[a,b] \Rightarrow$ ці норми еквівалентні.

Задача 1 Нехай $X = C^2[0,1]$, $\|x\|_1 = |x(0)| + |x'(1)| + \int_0^1 |x''(t)|\,dt$;
$\|x\|_2 = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| + \int_0^1 |x''(t)|\,dt$, $x\in C^2[0,1]$.

Довести, що $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні.

Задача 2 Нехай X – простір усіх послідовностей $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, у яких з деякого моменту (для кожної послідовності – свого) всі члени рівні 0. Для кожного числа $p\in[1,+\infty)$ визначимо $\|\cdot\|_p$ рівністю

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p},\ x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in X.$$

Довести, що ці норми попарно не еквівалентні, тобто для $\forall\, p_1,p_2\in[1,+\infty)$, $p_1\neq p_2$, норми $\|\cdot\|_{p_1}$ і $\|\cdot\|_{p_2}$ не еквівалентні

Задача 3 Нехай X - лінійний простір. Довести, що еквівалентність норм на X є відношенням еквівалентності, тобто: a) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$, де $\|\cdot\|$ - норма на X.

b) якщо $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, то $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$

c) якщо $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ і $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, то $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

Задача 4 Нехай X - лінійний простір, $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ - норми на X, які еквівалентні. Довести, що послідовність $x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_2)$

Р-ок. Оскільки $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні, то $\exists \alpha, \beta > 0$: $\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$, $x \in X$.

Нехай $x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_1) \Rightarrow \|x_n - x\|_1 \to 0, n \to \infty$. Оскільки $\|x_n - x\|_2 \le \beta \|x_n - x\|_1 \to 0, n \to \infty$, то $\|x_n - x\|_2 \to 0, n \to \infty \Rightarrow x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_2)$

Нехай, навпаки, $x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_2) \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0, n \to \infty$. Оскільки $\|x_n - x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x_n - x\|_2 \to 0, n \to \infty$, то $\|x_n - x\|_1 \to 0, n \to \infty \Rightarrow x_n \to x, n \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_1)$

Задача 5 Нехай X - лінійний простір, $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ - норми на X, які еквівалентні. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow \{x_n\}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_2)$.

Нагадування Якщо (X, ρ) - метричний простір, $\{x_n\}$ - послідовність елементів X, то $\{x_n\}$ називається фундаментальною в (X, ρ) якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m \ge N, \forall n \ge N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Р-ок. Оскільки $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні, то $\exists \alpha, \beta > 0$: $\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$, $x \in X$.

Нехай $\{x_n | n \ge 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|_1)$. Доведемо, що $\{x_n | n \ge 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|_2)$. Розглянемо $\forall \varepsilon > 0$. Нам треба знайти $N \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \ge N$ $\|x_m - x_n\|_2 < \varepsilon$. Ми знаємо, що $\|x_m - x_n\|_2 \le \beta \|x_m - x_n\|_1$. Отже, якщо $\|x_m - x_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{\beta} \Rightarrow \|x_m - x_n\|_2 < \varepsilon$.

Тепер застосуємо означення фундаментальності до $\{x_n | n \geq 1\}$ в $(X, \|\cdot\|_1)$ і числа $\frac{\varepsilon}{\beta} > 0$. Тоді: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq N$ $\|x_m - x_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{\beta} \Rightarrow \|x_m - x_n\|_2 < \varepsilon$. Це N і є шуканим.

Нехай тепер $\{x_n | n \geq 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|_2)$. Доведемо, що $\{x_n | n \geq 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|_1)$. Розглянемо $\forall \varepsilon > 0$. Нам треба знайти $N \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq N$ $\|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon$. Ми знаємо, що $\|x_m - x_n\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x_m - x_n\|_2$. Отже, якщо $\|x_m - x_n\|_2 < \alpha\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon$. Тепер застосуємо означення фундаментальності до $\{x_n | n \geq 1\}$ в $(X, \|\cdot\|_2)$ і числа $\alpha\varepsilon > 0$. Тоді: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq N$ $\|x_m - x_n\|_2 < \alpha\varepsilon$ $\Rightarrow \|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon$. Це N і є шуканим.

ст. 4

Задача 6. Нехай X – скінченновимірний лінійний простір. Довести, що довільні 2 норми на X еквівалентні.

Р-ок. Ми розглянемо випадок, коли базове поле скалярів $= \mathbb{R}$. Випадок $\mathbb{C}$ – самостійно. Виберемо в X базис $e_1, \ldots, e_n$ (тут $n = \dim X$). Тоді для $\forall x \in X$ існує єдиний набір чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, такий, що $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Ми можемо ототожнити x із вектором $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. При такому ототожненні $X \simeq \mathbb{R}^n$, і, таким чином, нам досить довести твердження про еквівалентність норм для $X = \mathbb{R}^n$.

Зауваження. Навіщо ми це зробили? Справа в тому, що із звичним для нас простором $\mathbb{R}^n$ працювати приємніше, ніж з якимось абстрактним X.

Отже, нам потрібно довести, що на просторі $\mathbb{R}^n$ довільні 2 норми еквівалентні. Позначимо $\|\cdot\|_0$ стандартну евклідову норму на $\mathbb{R}^n$, тобто $\|x\|_0 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тоді досить перевірити, що довільна норма на $\mathbb{R}^n$ еквівалентна $\|\cdot\|_0$ (чому цього досить? скористайтесь Задачею 3).

Отже, нехай $\|\cdot\|$ – норма на $\mathbb{R}^n$. Доведемо, що вона еквівалентна $\|\cdot\|_0$. Позначимо $v_i=(0,..,0,1,0,..,0)$, де 1 стоїть на i-му місці, $i=1,..,n$. Розглянемо довільний $x=(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Тоді

$$\|x\|=\|x_1v_1+\ldots+x_nv_n\|\le\|x_1v_1\|+\ldots+\|x_nv_n\|=$$

$$=|x_1|\cdot\|v_1\|+\ldots+|x_n|\cdot\|v_n\|\le\text{(за нерівністю Коші-Буняковського)}$$

$$\le\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}\cdot\sqrt{\|v_1\|^2+\ldots+\|v_n\|^2}=$$

$$=\underbrace{\sqrt{\|v_1\|^2+\ldots+\|v_n\|^2}}_{\beta}\cdot\|x\|_0\Rightarrow\|x\|\le\beta\|x\|_0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

ст. 5

Залишилось показати, що $\exists\alpha>0:\ \|x\|\ge\alpha\|x\|_0,\ x\in\mathbb{R}^n$. Визначимо функцію $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ рівністю $f(x)=\|x\|$, $x\in\mathbb{R}^n$. Доведемо, що вона неперервна (на $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}$ розглядаються звичайні топології, породжені евклідовими нормами). Для цього розглянемо $\forall x^*\in\mathbb{R}^n$ і доведемо, що f неперервна в т. x^*. Маємо:

$$|f(x)-f(x^*)|=|\|x\|-\|x^*\||\le\text{(використаємо другу нерівність трикутника для норми)}$$

$$\le\|x-x^*\|\le\beta\|x-x^*\|_0\to0 \text{ при } x\to x^* \text{ в } (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_0)\Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to x^*}f(x)=f(x^*)\Rightarrow f$ неперервна в т. x^*. Оскільки точка $x^*\in\mathbb{R}^n$ довільна, то f неперервна на $\mathbb{R}^n$.

Нехай $K=\{x\in\mathbb{R}^n: x_1^2+\ldots+x_n^2=1\}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_0=1\}$ — $(n-1)$-вимірна сфера в просторі $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_0)$. Вона замкнена і обмежена в $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_0)\Rightarrow$ компактна. Згадаємо, що f неперервна $\Rightarrow f$ досягає на компакті K найменшого значення. Отже, існує точка $x_*\in K$: $f(x)\ge f(x_*)$, $x\in K\Rightarrow\|x\|\ge\|x_*\|$, $x\in K$.

Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ маємо:

$$\|x\|=\|x\|_0\left\|\frac{x}{\|x\|_0}\right\|\ge\left(\frac{x}{\|x\|_0}\in K,\text{ бо }\left\|\frac{x}{\|x\|_0}\right\|_0=\frac{1}{\|x\|_0}\|x\|_0=1\right)$$

$$\ge\|x\|_0\cdot\|x_*\|=\underbrace{\|x_*\|}_{\alpha>0}\cdot\|x\|_0=\alpha\|x\|_0.$$

Отже, ми довели, що $\|x\| \geq \alpha \|x\|_0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Для $x=0$ ця нерівність теж, очевидно, виконується. Отже, $\|x\| \geq \alpha \|x\|_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Таким чином,

$$\alpha \|x\|_0 \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_0, \ x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{норми } \|\cdot\| \text{ і } \|\cdot\|_0$$

еквівалентні.

ст. 6

Задача 7 Довести, що збіжність послідовності в скінченновимірному нормованому лінійному просторі рівносильна її покоординатній збіжності. Більш детально: нехай $(X, \|\cdot\|)$ — скінченновимірний нормований лінійний простір. Нехай $n = \dim X$ і $e_1, \dots, e_n$ — базис X. Тоді для $\forall x \in X$ існує єдиний набір скалярів $x_1, \dots, x_n$ такий, що $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Нехай $\{x^{(k)} = x_1^{(k)} e_1 + \dots + x_n^{(k)} e_n \mid k \geq 1\}$ — послідовність елементів X і $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ — елемент простору X. Треба довести, що $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} \to x_1, \ k \to \infty \\ x_2^{(k)} \to x_2, \ k \to \infty \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \to x_n, \ k \to \infty \end{cases}$$

Р-ок. Введемо в X нову норму $\|\cdot\|_0$ наступним чином: $\|x\|_0 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in X$. Із задачі 6 випливає, що $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_0$ еквівалентні. Тоді, використавши задачу 4, маємо: $x^{(k)} \to x, k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|) \Leftrightarrow$ $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_0) \Leftrightarrow \|x^{(k)} - x\|_0 \to 0$, $k \to \infty \Leftrightarrow$ $\sqrt{|x_1^{(k)} - x_1|^2 + \dots + |x_n^{(k)} - x_n|^2} \to 0$, $k \to \infty \Leftrightarrow$ (чому?)

$$\begin{cases} |x_1^{(k)} - x_1| \to 0, \ k \to \infty \\ |x_2^{(k)} - x_2| \to 0, \ k \to \infty \\ \vdots \\ |x_n^{(k)} - x_n| \to 0, \ k \to \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k)} \to x_1, \ k \to \infty \\ x_2^{(k)} \to x_2, \ k \to \infty \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \to x_n, \ k \to \infty \end{cases}$$

Задача 8 Довести, що кожен скінченновимірний нормований лінійний простір є банаховим.

Нагадування: Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — нормований лінійний простір. $(X, \|\cdot\|)$ називається банаховим якщо цей простір повний відносно метрики, яка породжується нормою: $\rho(x,y) = \|x-y\|$, тобто якщо довільна фундаментальна в цьому просторі послідовність збігається до деякого елемента цього простору.

Р-ок Ми розглянемо випадок, коли базове поле скалярів $= \mathbb{R}$; випадок $\mathbb{C}$ — самостійно. Нехай $n = \dim X$ і $e_1, \dots, e_n$ — базис X. Тоді для $\forall x \in X$ існує єдиний набір дійсних чисел $x_1, \dots, x_n$ такий, що $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Введемо в X нову норму $\|x\|_0 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in X$. Із задачі 6 випливає, що $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_0$ еквівалентні.

Нехай $\{x^{(k)} | k \geq 1\}$ елементів простору X фундаментальна в $(X, \|\cdot\|)$. Треба довести, що $x^{(k)} \to$ деякого $x \in X$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|)$. Нехай $x^{(k)} = x_1^{(k)} e_1 + \dots + x_n^{(k)} e_n$, $k \geq 1$. Маємо:

$\{x^{(k)} | k \geq 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow$ (Задача 5)

$\{x^{(k)} | k \geq 1\}$ фунд. в $(X, \|\cdot\|_0) \Longrightarrow$ (означення фунд.)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k, l \geq N : \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_0 < \varepsilon \Longrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, l \geq N : \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^{(l)})^2 + \dots + (x_n^{(k)} - x_n^{(l)})^2} < \varepsilon \Longrightarrow$ (чому?)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, l \geq N : \begin{cases} |x_1^{(k)} - x_1^{(l)}| < \varepsilon \\ |x_2^{(k)} - x_2^{(l)}| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \{x_1^{(k)} \mid k \geq 1\} \text{ фундаментальна в } (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ \{x_2^{(k)} \mid k \geq 1\} \text{ фундаментальна в } (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ \vdots \\ \{x_n^{(k)} \mid k \geq 1\} \text{ фундаментальна в } (\mathbb{R}, |\cdot|) \end{cases}$$

ст. 8

Але із математичного аналізу, 1 курс, ми знаємо, що якщо послідовність дійсних чисел фундаментальна, то вона збіжна (до деякого дійсного числа). Позначимо $x_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)}$, $x_2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_2^{(k)}, \dots, x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}$ і утворимо $x := x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in X$. Перевіримо, що $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|)$. Маємо:

$$\|x^{(k)} - x\|_0 = \sqrt{\underbrace{(x_1^{(k)} - x_1)^2}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{(x_2^{(k)} - x_2)^2}_{\downarrow\, 0} + \dots + \underbrace{(x_n^{(k)} - x_n)^2}_{\downarrow\, 0}} \to 0, \; k \to \infty,$$

а тому $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|_0) \Rightarrow$ (Задача 4) $x^{(k)} \to x$, $k \to \infty$ в $(X, \|\cdot\|)$.

Висновок: ми показали, що кожна фундаментальна в $(X, \|\cdot\|)$ послідовність збіжна до деякого елемента простору X в $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow$ простір $(X, \|\cdot\|)$ банахів. ⌋

Задача 9 Довести, що кожна скінченновимірна лінійна множина в нормованому лінійному просторі є замкненою.

Р-ок: Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — нормований лінійний простір, L — скінченновимірна лінійна множина в X. L — скінченновимірна лінійна множина в X.

Нам треба довести, що L замкнена в X. Для цього припустимо, що послідовність $\{x_k \mid k \geq 1\}$ елементів L збігається до деякого елемента $x \in X$ в $(X, \|\cdot\|)$; тоді нам треба довести, що цей елемент x належить L. Маємо:

$x_k \to x,\ k\to\infty$ в $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow$ (чому? скористайтесь нерівністю $\|x_k - x_e\| \le \|x_k - x\| + \|x - x_e\|$)

$\{x_k | k\geq 1\}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow$ (чому?)

$\{x_k | k\geq 1\}$ фундаментальна в $(L, \|\cdot\|)$.

Згідно задачі 8 простір $(L, \|\cdot\|)$ банахів, а тому $\{x_k | k\geq 1\}$ збігається до деякого елемента $y\in L$ в $(L, \|\cdot\|)$. Маємо:

$x_k \to y,\ k\to\infty$ в $(L, \|\cdot\|) \Rightarrow$

ст.9

$\|x_k - y\| \to 0,\ k\to\infty \Rightarrow$

$x_k \to y,\ k\to\infty$ в $(X, \|\cdot\|)$. Тепер згадуємо, що $x_k \to x,\ k\to\infty$ в $(X, \|\cdot\|)$. Тоді із теореми про єдиність границі послідовності в метричному просторі $\Rightarrow x = y\in L$. Таким чином, $x\in L$. $\rfloor$