Практичне заняття 10: Слабка та *-слабка збіжності

Нехай X — нормований лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, X' — спряжений до X простір.

Озн 1. Послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів простору X називають сильно збіжною до $x_0\in X$ якщо $x_n\to x_0$, $n\to\infty$, тобто якщо $\|x_n-x_0\|\to 0$, $n\to\infty$.

Озн 2 Послідовність $\{x_n \mid n\geq 1\}$ елементів простору X називають слабко збіжною до $x_0\in X$ якщо $f(x_n)\to f(x_0)$, $n\to\infty$ для довільного функціонала $f\in X'$.

Позначення: $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n\to\infty$.

Озн 3 Послідовність функціоналів $\{f_n \mid n\geq 1\}\subset X'$ називають *-слабко збіжною до функціонала $f_0\in X'$ якщо $f_n(x)\to f_0(x)$, $n\to\infty$ для довільного елемента $x\in X$

ст 1

Позначення: $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$.

Таким чином, на просторі X є два види збіжності — сильна і слабка, а на X' є три види збіжності — сильна, слабка і *-слабка.

Задача 1 (Сильна зб. $\Rightarrow$ слабка зб. $\Rightarrow$ *-слабка зб.)

Нехай X — НЛП, $\{f_n \mid n\geq 1\}$ — послідовність функціоналів із X' і $f_0\in X'$. Розглянемо наступні твердження:

a) $f_n\to f_0$, $n\to\infty$ в X';

в) $f_n \xrightarrow{w} f_0$, $n\to\infty$ в X';

c) $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$ в X'.

Довести, що a) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ c).

Р-ок. Доведемо, що a) $\Rightarrow$ в). Нехай $f_n\to f_0$, $n\to\infty$ в X'. Розглянемо довільний функціонал $F\in(X')'=X''$. Оскільки F неперервний і $f_n\to f_0$, $n\to\infty$, то $F(f_n)\to F(f_0)$, $n\to\infty$. Тому $f_n \xrightarrow{w} f_0$, $n\to\infty$.

Доведемо, що в) $\Rightarrow$ c). Нехай $f_n \xrightarrow{w} f_0$, $n\to\infty$. Позначимо $e: X\to X''$ канонічне вкладення X в X'', тобто $e_x(f)=f(x)$, $f\in X'$, $x\in X$. Оскільки $f_n \xrightarrow{w} f_0$, $n\to\infty$, то $e_x(f_n)\to e_x(f_0)$, $n\to\infty$ для довільного $x\in X$, тобто $f_n(x)\to f_0(x)$, $n\to\infty$ для довільного $x\in X$. Це і означає, що $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$ в X'. $\lrcorner$

Задача 2 Нехай X — рефлексивний НЛП, $\{f_n | n \geq 1\}$ — послідовність функціоналів із X' і $f_0 \in X'$. Довести, що

$$f_n \xrightarrow{w} f_0, n \to \infty \iff f_n \xrightarrow{*-w} f_0, n \to \infty.$$

Р-ок. Позначимо $e: X \to X''$ канонічне вкладення X в X'', тобто $e_x(f) = f(x)$, $f \in X'$, $x \in X$. Оскільки простір X рефлексивний, то $X'' = e(X) = \{e_x | x \in X\}$. Маємо:

$f_n \xrightarrow{w} f_0, n \to \infty \iff F(f_n) \to F(f_0), n \to \infty$ для $\forall F \in X'' \iff$

$e_x(f_n) \to e_x(f_0), n \to \infty$ для $\forall x \in X \iff$

$f_n(x) \to f_0(x), n \to \infty$ для $\forall x \in X \iff$

$f_n \xrightarrow{*-w} f_0, n \to \infty.$ ┘

Задача 3 Довести єдиність границі для послідовності:

а) неперервних лінійних функціоналів, що $*$-слабко збігається

в) елементів НЛП, що слабко збігається.

Р-ок: **а)** Нехай X — НЛП, $\{f_n | n \geq 1\}$ — послідовність функціоналів із X', $f_0, g_0 \in X'$, і відомо, що $f_n \xrightarrow{*-w} f_0, n \to \infty$ в X' і $f_n \xrightarrow{*-w} g_0, n \to \infty$ в X'. Нам потрібно довести, що $f_0 = g_0$. Розглянемо $\forall x \in X$. Тоді за означенням $*$-слабкої збіжності маємо: $f_n(x) \to f_0(x), n \to \infty$ і $f_n(x) \to g_0(x), n \to \infty$. За теоремою про єдиність границі числової послідовності одержуємо: $f_0(x) = g_0(x)$. Оскільки елемент $x \in X$ довільний, то $f_0 = g_0$, що і потрібно було довести.

в) Нехай X — НЛП, $\{x_n | n \geq 1\}$ — послідовність елементів простору X, $x_0, y_0 \in X$ і відомо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0, n \to \infty$ і $x_n \xrightarrow{w} y_0, n \to \infty$. Нам потрібно довести, що $x_0 = y_0$. Розглянемо $\forall$ функціонал $f \in X'$. Тоді за означенням слабкої збіжності маємо: $f(x_n) \to f(x_0), n \to \infty$ і $f(x_n) \to f(y_0), n \to \infty$. За теоремою про єдиність границі числової послідовності одержуємо: $f(x_0) = f(y_0)$, тобто $f(x_0 - y_0) = 0$. Оскільки $f \in X'$ довільний, то $x_0 - y_0 = 0$. [Дійсно, припустимо, що $x_0 - y_0 \neq 0$; тоді за наслідком із теореми Гана-Банаха існує функціонал $f \in X'$, такий, що $\|f\|=1$ і $f(x_0-y_0)=\|x_0-y_0\|$. Тому $\|x_0-y_0\|=0$, $x_0-y_0=0$ — суперечність]. Тому $x_0=y_0$, що і було потрібно довести ⌋

Задача 4 (Критерій $*$-слабкої збіжності функціоналів). Нехай X — банахів простір, $\{f_n \mid n\geq 1\}$ — послідовність функціоналів із X' і $f_0 \in X'$. Тоді для того, щоб $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$ в X' необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:

а) $\{\|f_n\| \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1: \|f_n\|\leq C$;

в) існує M — тотальна множина в X така, що $f_n(x)\to f_0(x)$, $n\to\infty$ для всіх $x\in M$.

ст. 3

Р-ок: ця задача залишається Вам як вправа; розв'язання аналогічне розв'язанню задачі 2 із Практичного заняття 9 ⌋

Задача 5 а) Нехай X — нормований лінійний простір; $\{f_n \mid n\geq 1\}$ — послідовність функціоналів із X' і $f_0\in X'$. Припустимо, що $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$ в X'. Довести, що

$$\|f_0\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

в) Нехай X — нормований лінійний простір, $\{x_n \mid n\geq 1\}$ — послідовність елементів простору X, $x_0\in X$. Припустимо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n\to\infty$ в X. Довести, що

$$\|x_0\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Р-ок а). Якщо $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|f_n\|=+\infty$, то потрібне твердження очевидне. Тому надалі ми вважаємо, що $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|f_n\|<+\infty$. Позначимо $a:=\underline{\lim}_{n\to\infty}\|f_n\|\in\mathbb{R}$. Виберемо зростаючу послідовність натуральних чисел $n_1<n_2<n_3<\ldots$, таку, що $\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}\|=a$ (така послідовність існує, бо a є частковою границею $\{\|f_n\| \mid n\geq 1\}$). Для довільного $x\in X$ маємо: $|f_0(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|=\lim_{k\to\infty}|f_{n_k}(x)|\leq$ $\leq \lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}\|\cdot\|x\|=a\|x\|$. Отже, $|f_0(x)|\leq a\|x\|$ для довільного $x\in X \Rightarrow \|f_0\|\leq a$.

в) Позначимо $a := \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \in \mathbb{R}$ (бо послідовність $\{\|x_n\| \mid n\geq 1\}$ обмежена). Виберемо зростаючу послідовність натуральних чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, таку, що $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = a$ (така послідовність існує, бо a є частковою границею $\{\|x_n\| \mid n\geq 1\}$). Для довільного функціонала $f \in X'$ маємо: $|f(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \leq \lim_{k\to\infty} \|f\| \cdot \|x_{n_k}\| = a\|f\|$. Отже, $|f(x_0)| \leq a\|f\|$ для довільного $f \in X'$. За наслідком із теореми Гана-Банаха $\exists f \in X'$ такий, що $\|f\| = 1$ і $f(x_0) = \|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| \leq a$ $\lrcorner$

ст. 4

Задача 6 Нехай X – нормований лінійний простір, $x_0 \in X$; $\{x_n \mid n\geq 1\}$ – послідовність елементів простору X, $x_0 \in X$; $\{f_n \mid n \geq 1\}$ – послідовність функціоналів із X', $f_0 \in X'$. Довести, що $f_n(x_n) \to f_0(x_0)$, $n\to\infty$ якщо виконується одна з умов:

a) $x_n \to x_0$, $n\to\infty$ і $f_n \to f_0$, $n\to\infty$;

в) $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n\to\infty$ і $f_n \to f_0$, $n\to\infty$;

c) простір X банахів, $x_n \to x_0$, $n\to\infty$ і $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$.

Р-ок Нехай виконана умова а). Маємо:

$$|f_n(x_n) - f_0(x_0)| = |f_n(x_n) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_0(x_0)| \leq$$
$$\leq |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_0(x_0)| = |f_n(x_n - x_0)| + |(f_n - f_0)(x_0)| \leq$$
$$\leq \|f_n\| \cdot \|x_n - x_0\| + \|f_n - f_0\| \cdot \|x_0\| \leq$$
$$\leq \underbrace{(\|f_0\| + \underbrace{\|f_n - f_0\|}_{\downarrow 0})}_{\downarrow \|f_0\|} \cdot \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\|f_n - f_0\|}_{\downarrow 0} \cdot \|x_0\| \to 0, \ n \to \infty,$$

а тому $f_n(x_n) \to f_0(x_0)$, $n\to\infty$.

Нехай виконана умова в). Оскільки $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n\to\infty$, то послідовність $\{\|x_n\| \mid n\geq 1\}$ обмежена (див. задачу 2 в Практичному занятті 9), тобто $\exists C_1>0:\ \forall n\geq 1:$ $\|x_n\|\leq C_1$. Маємо: $|f_n(x_n)-f_0(x_0)| = |f_n(x_n)-f_0(x_n)+f_0(x_n)-f_0(x_0)|\leq$

$$\leq |f_n(x_n)-f_0(x_n)|+|f_0(x_n)-f_0(x_0)| =$$

$$= |(f_n-f_0)(x_n)|+|f_0(x_n)-f_0(x_0)|\leq \|f_n-f_0\|\cdot\|x_n\|+|f_0(x_n)-f_0(x_0)|\leq$$

$$\leq C_1\underbrace{\|f_n-f_0\|}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{|f_0(x_n)-f_0(x_0)|}_{0,\ \text{бо}\ x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n\to\infty} \longrightarrow 0,\ n\to\infty$$

Тому $f_n(x_n)\to f_0(x_0)$, $n\to\infty$.

Нехай виконана умова с). Оскільки простір X банахів і $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n\to\infty$, то послідовність $\{\|f_n\| \mid n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C_2>0:\ \forall n\geq 1:\ \|f_n\|\leq C_2$. Маємо:

$$|f_n(x_n)-f_0(x_0)| = |f_n(x_n)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f_0(x_0)|\leq$$

$$\leq |f_n(x_n)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_0(x_0)| = |f_n(x_n-x_0)|+|f_n(x_0)-f_0(x_0)|\leq$$

$$\leq \|f_n\|\cdot\|x_n-x_0\|+|f_n(x_0)-f_0(x_0)|\leq C_2\underbrace{\|x_n-x_0\|}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{|f_n(x_0)-f_0(x_0)|}_{0,\ \text{бо}\ f_n \xrightarrow{*-w} f_0,\ n\to\infty}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

Тому $f_n(x_n)\to f_0(x_0)$, $n\to\infty$. $\lrcorner$

Зауваження Якщо виконана умова а), то виконана умова в). Тому досить було довести, що $f_n(x_n)\to f_0(x_0)$, $n\to\infty$ якщо виконана одна з умов в), с).

Задача 7 Нехай простір $X=C[0,1]$. Визначимо послідовність функціоналів $\{f_n \mid n\geq 1\}$ із X' наступним чином:
$f_n(x)=n\int_0^{\frac{1}{n}} x(t)dt$, $x\in C[0,1]$, $n\geq 1$. Дослідити $\{f_n \mid n\geq 1\}$ на сильну і $*$-слабку збіжності в X'.

Р-ок: Спочатку дослідимо $\{f_n \mid n\geq 1\}$ на $*$-слабку збіжність в X'. Доведемо, що $f_n(x)\to x(0)$, $n\to\infty$ для $\forall x\in C[0,1]$.
Для $\forall x\in C[0,1]$ маємо: $|f_n(x)-x(0)| = \left|n\int_0^{1/n} x(t)dt - x(0)\right| =$

$$= \left|n\int_0^{1/n}(x(t)-x(0))dt\right| = n\left|\int_0^{1/n}(x(t)-x(0))dt\right|\leq n\int_0^{1/n}|x(t)-x(0)|dt\leq$$

$$\le n\int_0^{1/n}\max_{s\in[0,\frac1n]}|x(s)-x(0)|\,dt = n\cdot\frac1n\max_{s\in[0,\frac1n]}|x(s)-x(0)| =$$

$$=\max_{s\in[0,\frac1n]}|x(s)-x(0)|\to 0,\ n\to\infty$$ бо функція x неперервна в т.0. Таким чином, $f_n(x)\to x(0)$, $n\to\infty$ для $\forall x\in C[0,1]$. Визначимо функціонал $f_0\in X'$ рівністю $f_0(x)=x(0)$, $x\in C[0,1]$. Тоді $f_n(x)\to f_0(x)$, $n\to\infty$ для $\forall x\in C[0,1]$ $\Rightarrow f_n\xrightarrow{*-w}f_0$, $n\to\infty$ в X'.

Тепер дослідимо $\{f_n|n\ge1\}$ на сильну збіжність. Припустимо, що $f_n\to f\in X'$, $n\to\infty$. Тоді за задачею 1 випливає, що $f_n\xrightarrow{*-w}f$, $n\to\infty$ в X'. А тоді із задачі 3 $f=f_0$. Таким чином, функціонал f_0 є єдиним „претендентом" на сильну границю $\{f_n|n\ge1\}$. Маємо: $(f_n-f_0)(x)=n\int_0^{\frac1n}x(t)dt-x(0)$, $x\in C[0,1]$. Неважко показати, що $\|f_n-f_0\|=2$, $n\ge1$ (це залишається Вам як вправа). Тому $f_n\not\to f_0$, $n\to\infty\Rightarrow\{f_n|n\ge1\}$ не збігається сильно.

ст.6

Відповідь: $\{f_n|n\ge1\}$ не збігається сильно, і $f_n\xrightarrow{*-w}f_0$, $n\to\infty$ в X'.

Задача 8 Нехай простір $X=C[0,1]$. Визначимо послідовність функціоналів $\{f_n|n\ge1\}$ із X' наступним чином:

$$f_n(x)=\int_{[0,1]^n}x(t_1t_2\dots t_n)dt_1dt_2\dots dt_n,\ x\in C[0,1],\ n\ge1.$$

Дослідити $\{f_n|n\ge1\}$ на сильну і *-слабку збіжності в X'.

Р-ок: Спочатку дослідимо $\{f_n|n\ge1\}$ на *-слабку збіжність в X'. Визначимо функціонал $f_0\in X'$ рівністю $f_0(x)=x(0)$, $x\in C[0,1]$ і доведемо, що $f_n\xrightarrow{*-w}f_0$, $n\to\infty$ в X'. Для цього використаємо задачу 4 (критерій *-слабкої збіжності функціоналів). Нам потрібно перевірити дві умови — а) і б)

Умова а) Оцінимо $\|f_n\|$. Для $\forall x\in C[0,1]$ маємо:

$|f_n(x)| = \left| \int\limits_{[0,1]^n} x(t_1 t_2 \cdots t_n)\,dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right| \leq \int\limits_{[0,1]^n} |x(t_1 t_2 \cdots t_n)|\,dt_1 \cdots dt_n \leq$

$\leq \int\limits_{[0,1]^n} \|x\|\,dt_1 \cdots dt_n = \|x\|$. Отже, $|f_n(x)| \leq \|x\|$, $x \in C[0,1] \Rightarrow$

$\|f_n\| \leq 1$, $n \geq 1$. Тому умова а) виконана.

Умова в) Оберемо множину $M = \{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$. Тоді

M — тотальна в $C[0,1]$ (це залишається Вам як

вправа. Вам допоможе апроксимаційна теорема

[redacted] Веєрштрасса). Маємо:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]^n} 1\,dt_1 \cdots dt_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 = f_0(1)$, для $\alpha \geq 1$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t^\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]^n} (t_1 t_2 \cdots t_n)^\alpha\,dt_1 \cdots dt_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]^n} t_1^\alpha \cdots t_n^\alpha\,dt_1 \cdots dt_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 t_1^\alpha dt_1 \int\limits_0^1 t_2^\alpha dt_2 \cdots \int\limits_0^1 t_n^\alpha dt_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\alpha+1)^n} = 0 = f_0(t^\alpha)$.

Отже, умова в) виконана. Тому із задачі 4 $\Rightarrow$

$f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n \to \infty$ в X'.

Тепер дослідимо $\{f_n | n \geq 1\}$ на сильну збіжність.

Припустимо, що $f_n \to f \in X'$, $n \to \infty$. Тоді за задачею 1

$f_n \xrightarrow{*-w} f$, $n \to \infty$ в X'. А тоді із задачі 3 випливає, що

$f = f_0$. Таким чином, функціонал f_0 є єдиним

„претендентом" на сильну границю $\{f_n | n \geq 1\}$.

Маємо: $(f_n - f_0)(x) = \int\limits_{[0,1]^n} x(t_1 t_2 \cdots t_n)\,dt_1 \cdots dt_n - x(0)$, $x \in C[0,1]$.

Можна показати, що $\|f_n - f_0\| = 2$, $n \geq 1$ (це залишається

Вам як вправа). Тому $f_n \not\to f_0$, $n \to \infty \Rightarrow \{f_n | n \geq 1\}$

не збігається сильно.

Відповідь: $\{f_n | n \geq 1\}$ не збігається сильно і

$f_n \xrightarrow{*-w} f_0$, $n \to \infty$ в X'.

Задача 9 Нехай простір $X = L_p[0, 2\pi]$, де $1 < p < +\infty$. Визначимо

послідовність функціоналів $\{f_n | n \geq 1\}$ із X' наступним

чином: $f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t) \sin nt\,dt$, $x \in L_p[0, 2\pi]$, $n \geq 1$. Дослідити

$\{f_n | n \geq 1\}$ на сильну, слабку і $*$-слабку збіжності в X'.

Р-ок: Дослідимо $\{f_n | n\geq 1\}$ на $*$-слабку збіжність в X'. Можна довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} 0,\ n\to\infty$ в X' (див. [ФА1], розділ 5, задача 4, пункт 1. Буде гарно, якщо ви розберете обидва способи).

Дослідимо $\{f_n | n\geq 1\}$ на слабку збіжність. Оскільки $p\in(1,+\infty)$, то простір $X=L_p[0,2\pi]$ рефлексивний.

Тоді із задачі 2 $\Rightarrow f_n \xrightarrow{w} 0,\ n\to\infty$ в X'.

Дослідимо $\{f_n | n\geq 1\}$ на сильну збіжність. Оскільки $f_n \xrightarrow{*-w} 0,\ n\to\infty$ в X', то нульовий функціонал 0 є єдиним „претендентом" на сильну границю $\{f_n | n\geq 1\}$. Покажемо, що $f_n \not\to 0,\ n\to\infty$. Позначимо q спряжений до p індекс (тобто $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $q=\frac{p}{p-1}$), тоді $q\in(1,+\infty)$. Нагадаємо, що простір $(L_p[0,2\pi])'$ можна ототожнити з простором $L_q[0,2\pi]$, при цьому ототож[redacted]ненні функціоналу f_n відповідає елемент $a_n\in L_q[0,2\pi]$, де $a_n(t)=\sin nt,\ t\in[0,2\pi],\ n\geq 1$.

Тому $\|f_n\|=\|a_n\|_q$. За нерівністю Гельдера:

$\|a_n\|_1=\|a_n\cdot 1\|_1\leq \|a_n\|_q\cdot\|1\|_p \Rightarrow \|a_n\|_q\geq \frac{\|a_n\|_1}{\|1\|_p}$. Маємо:

1) $\|1\|_p=\left(\int_0^{2\pi} 1^p\,dt\right)^{1/p}=(2\pi)^{1/p}$;

2) $\|a_n\|_1=\int_0^{2\pi}|\sin nt|\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|\sin nt|\,d(nt)=$ $\left|\begin{array}{l}\text{робимо заміну змінної}\\ s=nt;\\ t=0\Rightarrow s=0\\ t=2\pi\Rightarrow s=2\pi n\end{array}\right|$

$=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi n}|\sin s|\,ds=$ $\left|\begin{array}{l}\text{функція } |\sin s| \text{ [redacted]}\\ \text{періодична з періодом}\\ T=\pi, \text{ бо } |\sin(s+\pi)|=|-\sin s|=\\ =|\sin s|\end{array}\right|$

$=\frac{1}{n}\cdot 2n\int_0^{\pi}|\sin s|\,ds=2\int_0^{\pi}\sin s\,ds=-2\cos s\Big|_0^{\pi}=2-(-2)=4.$

Тому $\|f_n\|=\|a_n\|_q\geq\frac{\|a_n\|_1}{\|1\|_p}=\frac{4}{(2\pi)^{1/p}}$ для всіх $n\geq 1$, а тому $f_n\not\to 0,\ n\to\infty \Rightarrow \{f_n|n\geq 1\}$ не збігається в $(L_p[0,2\pi])'$.

Відповідь: $\{f_n|n\geq 1\}$ не збігається сильно; $f_n\xrightarrow{w}0,\ n\to\infty$ в X'; $f_n\xrightarrow{*-w}0,\ n\to\infty$ в X'.

Задача 10 Нехай H – гільбертів простір, $x_0, x_n \in H, n \geq 1$. Довести, що:

a) $x_n \xrightarrow{w} x_0, n \to \infty \iff (x_n, a) \to (x_0, a), n \to \infty$ для всіх $a \in H$;

в) якщо $x_n \xrightarrow{w} x_0, n \to \infty$ і $y_n \to y_0, n \to \infty$, то $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, $n \to \infty$;

c) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до 0;

d) $x_n \to x_0, n \to \infty$ якщо $x_n \xrightarrow{w} x_0, n \to \infty$ і $\|x_n\| \to \|x_0\|$, $n \to \infty$.

ст 9

Р-ок: a) випливає із означення слабкої збіжності і теореми Ф. Рісса про загальний вигляд неперервного лінійного функціонала на гільбертовому просторі.

в) випливає із задачі 6, пункт в).

c) Нехай $\{e_n \mid n \geq 1\}$ – ортонормована послідовність в H. Розглянемо $\forall x \in H$. За нерівністю Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ збігається $\Rightarrow$ загальний член $|(x, e_n)|^2 \to 0, n \to \infty \Rightarrow$ $(x, e_n) \to 0, n \to \infty \Rightarrow (e_n, x) \to 0, n \to \infty$. Таким чином, $(e_n, x) \to 0, n \to \infty$ для довільного $x \in H \Rightarrow$ $e_n \xrightarrow{w} 0, n \to \infty$.

d) Розглянемо $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_0\|^2 = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n - x_0, x_n - x_0) =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left((x_n, x_n) - (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + (x_0, x_0) \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\|x_n\|^2 - (x_n, x_0) - \overline{(x_n, x_0)} + \|x_0\|^2 \right) =$$

$$= \|x_0\|^2 - (x_0, x_0) - \overline{(x_0, x_0)} + \|x_0\|^2 = 2\|x_0\|^2 - 2\|x_0\|^2 = 0.$$

Тому $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0 \Rightarrow x_n \to x_0, n \to \infty$.

Задача 11 Нехай $\{x_n \mid n \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести еквівалентність таких тверджень:

a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається сильно;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається слабко;

c) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ збігається.

Р-ок Нам знадобиться наступна лема:

Лема Нехай H-простір із скалярним добутком, $h_1, h_2, \dots, h_n$ — попарно ортогональні елементи H. Тоді

$$\|h_1+h_2+\dots+h_n\| = \sqrt{\|h_1\|^2+\|h_2\|^2+\dots+\|h_n\|^2}.$$

Доведення Маємо: $\|h_1+h_2+\dots+h_n\|^2 = (h_1+\dots+h_n, h_1+\dots+h_n) = \sum_{i=1}^{n}\|h_i\|^2 + \sum_{i\neq j}(h_i,h_j) = \sum_{i=1}^{n}\|h_i\|^2 + \sum_{i\neq j}0 = \sum_{i=1}^{n}\|h_i\|^2$, звідки випливає потрібна рівність.

Р-ок задачі 11: a) ⇒ в) випливає із задачі 1 практичного заняття 9.

в) ⇒ c) Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ збігається слабко, тобто послідовність його часткових сум $S_n = x_1+\dots+x_n$, $n\geq 1$ збігається слабко. Тоді $\{S_n \mid n\geq 1\}$ обмежена (див. задачу 2 практичного заняття 9), тобто $\exists C>0$: $\forall n\geq 1$ $\|S_n\|\leq C$. Тоді із леми випливає, що

$\forall n\geq 1: \sqrt{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\dots+\|x_n\|^2}\leq C \Rightarrow \forall n\geq 1: \|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2\leq C^2 \Rightarrow$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ збігається.

c) ⇒ a) Розглянемо послідовність S_n часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, тобто $S_n = x_1+\dots+x_n$, $n\geq 1$. Доведемо, що $\{S_n \mid n\geq 1\}$ фундаментальна. Розглянемо $\forall \varepsilon>0$. Тоді нам потрібно показати, що $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n\geq N$ і $\forall p\in\mathbb{N}$ $\|S_{n+p}-S_n\|<\varepsilon$. Маємо: $\|S_{n+p}-S_n\| = \|x_1+\dots+x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+p} - (x_1+\dots+x_n)\| = \|x_{n+1}+\dots+x_{n+p}\| =$ (застосовуємо лему) $= \sqrt{\|x_{n+1}\|^2+\dots+\|x_{n+p}\|^2}$. Тому $\|S_{n+p}-S_n\|<\varepsilon \Leftrightarrow$ $\|x_{n+1}\|^2+\|x_{n+2}\|^2+\dots+\|x_{n+p}\|^2<\varepsilon^2$. Тепер розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ і послідовність його часткових сум $a_n = \|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2$. За умовою c) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ збігається $\Rightarrow$ $\{a_n \mid n\geq 1\}$ збігається (до деякого дійсного числа) $\Rightarrow$ $\{a_n \mid n\geq 1\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ для числа $\varepsilon^2>0$ $\exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N$ і $\forall p\in\mathbb{N}$ $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon^2$.

Маємо: $|a_{n+p}-a_n| = \left| \|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2+\|x_{n+1}\|^2+\ldots+\|x_{n+p}\|^2 - (\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2)\right| = \|x_{n+1}\|^2+\ldots+\|x_{n+p}\|^2$. Отже, для $\forall n\geq N$ і $\forall p\in\mathbb{N}$ $\|x_{n+1}\|^2+\ldots+\|x_{n+p}\|^2<\varepsilon^2 \Rightarrow$

$\forall n\geq N$ і $\forall p\in\mathbb{N}$ $\|s_{n+p}-s_n\|<\varepsilon$.

Отже, ми довели, що $\{s_n | n\geq 1\}$ фундаментальна. Оскільки простір H гільбертів, то H повний $\Rightarrow$ $\{s_n | n\geq 1\}$ збіжна до деякого елемента простору $H \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається сильно, що і потрібно було довести.

ст. 11

Задача 12 (Частковий випадок теореми Банаха-Сакса).
Нехай H — гільбертів простір, $\{x_n | n\geq 1\}$ — послідовність елементів простору H і $x_0\in H$. Припустимо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n\to\infty$. Довести, що тоді існує зростаюча послідовність номерів $n_1<n_2<n_3<\ldots$, така, що

$$\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}}{k} \to x_0,\ k\to\infty.$$

Р-ок Без обмеження загальності можна вважати, що $x_0=0$ (подумайте, чому?). Тоді ми знаємо, що $x_n \xrightarrow{w} 0,\ n\to\infty$, а потрібно довести, що існує зростаюча послідовність номерів $n_1<n_2<n_3<\ldots$ така, що $\dfrac{x_{n_1}+x_{n_2}+\ldots+x_{n_k}}{k}\to 0,\ k\to\infty$. Оскільки $x_n\xrightarrow{w}0$, $n\to\infty$, то:

1) $\{x_n | n\geq 1\}$ обмежена, тобто $\exists C>0: \forall n\geq 1: \|x_n\|\leq C$;

2) для довільного $x\in H$ $(x_n, x)\to 0,\ n\to\infty$.

Будемо вибирати шукану $\{n_k | k\geq 1\}$ покроково.

1 крок Покладемо $n_1=1$.

2 крок Оскільки $(x_n, x_{n_1})\to 0,\ n\to\infty$, то існує номер $n_2>n_1$, такий, що $|(x_{n_2}, x_{n_1})|<1$.

3 крок Оскільки $(x_n, x_{n_1})\to 0,\ n\to\infty$ і $(x_n, x_{n_2})\to 0,\ n\to\infty$, то при всіх досить великих n будуть одночасно виконані нерівності $|(x_n, x_{n_1})|<\frac{1}{2}$ і $|(x_n, x_{n_2})|<\frac{1}{2}$.

Тому існує номер $n_3>n_2: |(x_{n_3}, x_{n_1})|<\frac{1}{2}$ і $|(x_{n_3}, x_{n_2})|<\frac{1}{2}$.

і т.д.

k-ий крок Нехай вже вибрані номери $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$. Оскільки $(x_n, x_{n_1}) \to 0, n \to \infty$; $(x_n, x_{n_2}) \to 0, n \to \infty$ і т.д. $(x_n, x_{n_{k-1}}) \to 0, n \to \infty$, то при всіх досить великих n будуть одночасно виконані нерівності $|(x_n, x_{n_1})| < \frac{1}{k-1}$, $|(x_n, x_{n_2})| < \frac{1}{k-1}, \dots, |(x_n, x_{n_{k-1}})| < \frac{1}{k-1}$. Тому існує номер $n_k > n_{k-1}$ такий, що $|(x_{n_k}, x_{n_1})| < \frac{1}{k-1}$, $|(x_{n_k}, x_{n_2})| < \frac{1}{k-1}, \dots,$ $|(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})| < \frac{1}{k-1}$.

ст. 12

і т.д.

Таким чином, ми вибрали послідовність номерів $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Доведемо, що $\frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k} \to 0, k \to \infty$.

Для цього оцінимо $\|x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}\|$. Маємо:

$$\|x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}\|^2 = (x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}, x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}) =$$

$$= \left(\|x_{n_1}\|^2 + \dots + \|x_{n_k}\|^2\right) + \left((x_{n_1}, x_{n_2}) + (x_{n_2}, x_{n_1})\right) + \left((x_{n_3}, x_{n_1}) + (x_{n_1}, x_{n_3}) + (x_{n_3}, x_{n_2}) + (x_{n_2}, x_{n_3})\right) + \dots + \left((x_{n_k}, x_{n_1}) + (x_{n_1}, x_{n_k}) + (x_{n_k}, x_{n_2}) + (x_{n_2}, x_{n_k}) + \dots + (x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}}, x_{n_k})\right) =$$

$$= \left(\|x_{n_1}\|^2 + \dots + \|x_{n_k}\|^2\right) + 2\mathrm{Re}(x_{n_2}, x_{n_1}) + \left(2\mathrm{Re}(x_{n_3}, x_{n_1}) + 2\mathrm{Re}(x_{n_3}, x_{n_2})\right) + \dots + \left(2\mathrm{Re}(x_{n_k}, x_{n_1}) + 2\mathrm{Re}(x_{n_k}, x_{n_2}) + \dots + 2\mathrm{Re}(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})\right) <$$

$$< k \cdot c^2 + 2 \cdot 1 + \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + 2\underbrace{\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1}\right)}_{k-1 \text{ доданків}} = k \cdot c^2 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{k-1 \text{ доданків}} =$$

$$= kc^2 + 2(k-1) < kc^2 + 2k = (c^2 + 2)k.$$

Таким чином, ми показали, що $\|x_{n_1} + \dots + x_{n_k}\|^2 < (c^2 + 2)k \Rightarrow \|x_{n_1} + \dots + x_{n_k}\| < \sqrt{c^2 + 2} \cdot \sqrt{k}$. А тоді

$$\left\|\frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k}\right\| = \frac{1}{k}\|x_{n_1} + \dots + x_{n_k}\| < \frac{1}{k}\sqrt{c^2 + 2}\sqrt{k} = \frac{\sqrt{c^2 + 2}}{\sqrt{k}} \to 0, k \to \infty \Rightarrow$$

$\frac{x_{n_1} + \dots + x_{n_k}}{k} \to 0, k \to \infty$, що і було потрібно.

Домашнє завдання:

1. Вправи по ходу практичного заняття

2. Дослідити послідовність функціоналів $\{f_n | n \geq 1\}$ із X' на сильну, слабку і $*$-слабку збіжності в X':

a) $X = L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < +\infty$, $f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, dt$, $x \in X$, $n \geq 1$.

b) $X = L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < +\infty$, $f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t) e^{int} dt$, $x \in X$, $n \geq 1$

3. Дослідити послідовність функціоналів $\{f_n | n \geq 1\}$ із X' на сильну і $*$-слабку збіжності в X'.

a) $X = C[0,1]$, $f_n(x) = \frac{n}{2} \int\limits_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} x(t) dt$, $x \in C[0,1]$, $n \geq 2$.

ст. 13

b) $X = C[0,1]$, $f_n(x) = \sqrt{n} \int\limits_{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t) dt$, $x \in C[0,1]$, $n \geq 1$.

c) $X = C[0,1]$, $f_n(x) = n \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - 2nt) x(t) dt$, $x \in C[0,1]$, $n \geq 1$

d) $X = C[0,1]$, $f_n(x) = n \int\limits_0^1 x(t) t^n dt$, $x \in C[0,1]$, $n \geq 1$.

e) $X = C^1[-1,1]$ із нормою $\|x\| = \max\limits_{t \in [-1,1]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [-1,1]} |x'(t)|$, $x \in C^1[-1,1]$, $f_n(x) = \frac{n}{2}\left(x\left(\frac{1}{n}\right) - x\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$, $x \in C^1[-1,1]$, $n \geq 1$.

4. Збірник задач [ФА1], розділ 5, задачі: 6, 12, 14 (норма має бути визначена формулою $\|x\| = \max\limits_{t \in [-1,1]} |x(t)|$), 15, 16, 17, 19.