H – простір над $\mathbb{C}$,

$H \ni x, y \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$, $\|x\|^2 = (x, x)$ гільбертів пр-р.

$f, g \in H$, $\cos\varphi = \frac{|(f,g)|}{\|f\|\|g\|}$.

<u>Тв</u> $(\cdot,\cdot)$ неперервний, тобто $x_n \to x$, $y_n \to y \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y)$

<u>Озн</u>. $H \ni x \perp y \overset{df}{\Leftrightarrow} (x, y) = 0$

$G \subset H$, $x \perp G \Leftrightarrow x \perp y, \forall y \in G$.

~~Налиш~~ Ортогональне доповнення до G

$G^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp G\} = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in G\}$

1) $G^{\perp}$ – підпростір в H $\quad x_1 \perp y,\ x_2 \perp y \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \perp y$

2) $H \ni x_n \to x$, $(x_n, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$.

2) якщо $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + \underset{0}{(x, y)} + \underset{0}{(y, x)} + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

<u>Проекція вектора на підпростір.</u>

$G \subset H$ – підпростір, $H \ni x$, тоді $пр_G x$ –

це вектор $y \in G$, що $x - y \perp G$.

<u>T</u> Нехай $H \supset G$ – підпростір $\Rightarrow \forall x \in H\ \exists!\ пр_G x$.

<u>D</u>. $x \notin G$. $\quad d = \rho(x, G) = \inf_{y \in G} \|x - y\| > 0$.

$\Rightarrow \exists\ y_n \in G$, $\quad d_n = \|x - y_n\| \to d$.

$\forall h \in G$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{C} \Rightarrow y_n + \varepsilon h \in G$, тоді $\underline{\|x - (y_n + \varepsilon h)\| \geq d}$

$\|x - y_n - \varepsilon h\|^2 = (x - y_n - \varepsilon h, x - y_n - \varepsilon h) = (x - y_n, x - y_n) -$

$- \bar{\varepsilon}(x - y_n, h) - \varepsilon(h, x - y_n) + |\varepsilon|^2 (h, h) \geq d^2$ $\quad \varepsilon = \frac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}$

~~$\|x - y_n - \varepsilon h\|^2$~~ $\|x - y_n\|^2 - \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \geq d^2$

$|(x - y_n, h)|^2 \leq (d_n^2 - d^2)\|h\|^2$

$|(y_n - y_m, h)| \leq |(y_n - x, h) + (y_m - x, h)| \leq \|h\|(\sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2})$

$h = y_n - y_m$ $\quad \|y_n - y_m\|^2 \leq \|y_n - y_m\|(\sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2}) \Rightarrow \|y_n - y_m\| \to 0$.

$\exists\, y = \lim y_n \in G$, причому $(x-y, h) = 0 \ \forall h \in G$.

Єдиність. $y = \text{пр}_G x$, $y' = \text{пр}_G x$

$(y'-y, h) = (x - y - \cancel{x} + y', h) = (x-y, h) - (x-y', h) = 0 \ \forall h \in G$

$h = y' - y \Rightarrow \|y'-y\|^2 = 0$. $\boxed{Z}$

Насл. Нехай $G \subset H$, підпростір $\Rightarrow$

$\forall x \in H \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in G, \ x_2 \in G^\perp, \ x_1 = \text{пр}_G x, \ x_2 = \text{пр}_{G^\perp} x$.

$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

Насл. $\|\text{пр}_G x\| \le \|x\|$.

Ортогональні прямі суми. G_1, G_2 - гільбертові пр.-р.

$H = G_1 \oplus G_2$ - ортогональна пряма сума

$H \ni x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in G_1, \ x_2 \in G_2$,

$y = y_1 + y_2 \qquad y_1 \in G_1, \ y_2 \in G_2$

$(x, y)_H := (x_1, y_1)_{G_1} + (x_2, y_2)_{G_2} \Rightarrow x_1 + 0, \ 0 + y_2$

G_1 вкладається в H, $x_1 + 0$, G_2 - як в.-рі $0 + x_2$

$\|x\|_H^2 = \|x_1\|_{G_1}^2 + \|x_2\|_{G_2}^2$.

Вправа. H повний.

$l_p' = l_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad (L_p(R, d\mu))' = L_{p'}(R, d\mu)$.

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow p' = \frac{1}{2}$

Т. Ріса. Нехай H - гільбертів пр-р, тоді $\forall l \in H'$ $\exists u \in H$, що $\forall x \in H$ $\quad l(x) = (x, u)$, $\quad \|l\| = \|u\|$.
тобто $H' = H$.

Д. $l(x) = (x, u)$ - лінійний непр. ф-л.

$|(x, u)| \le \|x\| \|u\| \Rightarrow \|l\| \le \|u\|$

покладемо $x = u$, $|l(u)| = (u, u) = \|u\|^2$.

Нехай $l \in H'$, що покажемо, як знайти u.

$G = \operatorname{Ker} l = \{x \in H \mid l(x) = 0\} \Rightarrow \exists y \in H$, що

$\forall x = g + \lambda y$, $g \in G$. $\quad e = y - np_G y \perp G$,

тоді $\forall x = g + \lambda e$, можна вважати $\|e\| = 1$.

При цьому $(x, e) = (g + \lambda e, e) = \lambda (e, e) = \lambda$.

Тоді $l(x) = l(g + \lambda e) = \underset{0}{l(g)} + \lambda l(e) = (x, e) l(e) =$

$= (x, \overline{l(e)} e)$, тоді $u = \overline{l(e)} e$ - потрібний е-р.

Тобто $l(x) = (x, u)$, $\|u\| = \|l\|$.

<u>Єдиність</u>. $l(x) = (x, u) = (x, v) \Rightarrow (x, u - v) = 0 \ \forall x \in E$,

зокрема, $x = u - v \Rightarrow \|u - v\|^2 = 0$. ■

Як множини $H' = H$, $l \mapsto u$,

$\alpha l(x) = \alpha (x, u) = (x, \bar{\alpha} u)$.

<u>Наслідок</u>. $G \subset H$ тотальна $\Leftrightarrow G^{\perp} = \{0\}$

Ортонормовані системи та базиси

Озн. ~~$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$~~ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ортонормована, якщо $(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$.

Пр $H = l_2$, $e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0 \ldots)$

Л. Нехай $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ - ортонор. с-ма, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збіжна в H $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Нехай $n > m$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j - \sum_{j=1}^{m} c_j e_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right) = \sum_{j,k=m+1}^{n} c_j \bar{c}_k (e_j, e_k) = \sum_{j=m+1}^{n} |c_j|^2 \ \blacksquare$$

Т. Нерівність Бесселя. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ - о.н.с. тоді $\forall x \in H$ збігається ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) \cdot e_j$, причому

$$\|x\|^2 \geq \cancel{\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2} \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2.$$

Д $0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j \right\|^2 = \left(x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j, x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right) =$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)(e_j, x) - \sum_{k=1}^{n} \overline{(x, e_k)} (x, e_k) + \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) \overline{(x, e_j)}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2, \ n \to \infty. \ \blacksquare$$

Заув. $G = \{\lambda e\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|e\| = 1$, $\text{пр}_G x = \text{пр}_e x = (x, e) e$.

(x, e_j) - коефіцієнти Фур'є вектора x за $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Ортонормовані базиси. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – о.н.с. в H

$G = $ з.л.о. $\{e_j, j=1,\dots\}$. Тоді $\text{пр}_G x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j$

$$\left(x - \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j, e_k\right) = (x, e_k) - (x, e_k)(e_k, e_k) = 0.$$

Озн. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормований базис $\Leftrightarrow$ о.н.с, з.л.о.$\{e_j\} = H$

$\Rightarrow$ Якщо $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – о.н.б., тоді: $\forall x \in H$, маємо

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j.$$

Т. О.Н.С. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ є базисом $\Leftrightarrow$ виконується р. Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2.$$

$\underline{\Delta}$. Як $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – о.н.б. $\Rightarrow$ рівність Парсеваля.

При доведенні н. Бесселя

$$\left\|x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\right\| = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2$$

Якщо виконується р. Парсеваля $\Rightarrow \left\|x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ з.л.о. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} = H$ $\blacksquare$.

Ортогоналізація системи векторів.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$. Тоді $\exists$ о.н.с. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$,

що з.л.о. $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} = $ з.л.о. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Конструкція. $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. u_{j_2} – перший з векторів $u_2, u_3, \dots, u_{j_2}$, який лінійно незалежний з e_1,

тобто $u_{j_2} \notin$ л.о. $\{e_1\}$. Покладімо $e_2 = \frac{u_{j_2} - \text{пр}_{e_1} u_{j_2}}{\|u_{j_2} - \text{пр}_{e_1} u_{j_2}\|}$,

тоді $(e_1, e_2) = 0$. $G_2 = $ л.о. $\{e_1, e_2\}$,

u_{j_3} – перший вектор, який не лежить в G_2, $e_3 = \frac{u_{j_3} - \text{пр}_G u_{j_3}}{\|u_{j_3} - \text{пр}_G u_{j_3}\|}$

$\Rightarrow e_3 \perp e_1$, $e_3 \perp e_2$, $\|e_3\| = 1$, $\dots$ e_j

Тоді л.о. $\{u_1, u_{j_2}, u_{j_3}, \dots, u_{j_k}\} = $ л.о. $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

$\Rightarrow$ з.л.о. $\{u_j\} = $ з.л.о. $\{e_j\}$.

$H = L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, $u_j = x^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$

Якщо у H $\exists$ ОНБ $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ $\Rightarrow$ H сепарабельний

$\sum_{j=1}^{n} c_j e_j$, c_j - раціональні.

<u>Т.</u> Довільний сепарабельний H ізоморфний l_2.

<u>Д.</u> ~~H⇒x~~. H - сепар. $\Rightarrow$ $\exists$ зліченна щільна множина $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$

Ортогоналізуємо $\Rightarrow$ $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ - о.н.б.

$$H \ni x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots) \in l_2$$

Рівність Парсеваля $\Rightarrow$ ізометричний ізоморфізм,

$$\boxed{(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.}$$ $\blacksquare$