E - л.н.п., E' - спряжений до E, $\|l\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$.

E'' - банахів.

Т. $E \subseteq E''$, $\|x\|_E = \|x\|_{E''}$.

$\mathcal{D}$. $\forall x \in E$, $\forall l \in E'$ $\langle x, l \rangle := l(x)$.

$\langle \alpha x + \beta y, l \rangle = \alpha \langle \cancel{x}, l \rangle + \beta \langle y, l \rangle$

$\langle x, \alpha l + \beta m \rangle = \alpha \langle x, l \rangle + \beta \langle x, m \rangle$

$|\langle x, l \rangle| \leq \|x\|_E \; \|l\|_{E'}$

Якщо зафіксувати $x \in E$ $x \to L_x(l) = \langle x, l \rangle = l(x)$

$\Rightarrow \|L_x\| \leq \|x\|$.

Розглянемо $\varphi: E \ni x \to L_x \overset{?}{\in} E''$.

φ - лінійне, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$.

1. Ін'єктивність. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, $x \neq y$, $\Leftrightarrow$ $\varphi(x-y) \neq 0$ $x - y \neq 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

$\forall x \neq 0$ $\exists l \in E'$, $\|l\| = 1$, $l(x) = \|x\| \Rightarrow \underset{\varphi(x)}{L_x}(l) = l(x) = \|x\| \neq 0$

2. Ізометричність. $x \neq 0 \Rightarrow \exists l \in E'$, $\|l\| = 1$, $l(x) = \|x\|$.

Тоді: $\|x\| = l(x) = L_x(l) = |L_x(l)| \leq \|L_x\| \, \underset{1}{\|l\|} = \|L_x\|$

$\Rightarrow \|x\| \leq \|L_x\| \Rightarrow \|x\| = \|L_x\|$. ∎

$E \subseteq E''$.

Означення E рефлексивний, якщо $E = E''$

Приклади 1) l_p, $1 < p < \infty$, то $(l_p)' = l_{p'}$, $(l_{p'})' = l_p$.

2) $L_p(R, d\mu)$, $1 < p < \infty$, $(L_p(R, d\mu))' = L_{p'}(R, d\mu)$,

$\Rightarrow (L_p(R, d\mu))'' = L_p(R, d\mu)$.

3) $(l_1)' = l_\infty$, $(l_\infty)' \supset l_1$, $l_1 \neq (l_\infty)' \Rightarrow l_1'' \neq l_1$

4) l_∞, $L_1(R, d\mu)$, $L_\infty(R, d\mu)$, $C(Q)$ нерефлексивні.

Вправа $\dim E < \infty$, то E рефлексивний.

Теорема Банаха-Штейнгауза

Т. Нехай E - банахів простір. Нехай $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$. Якщо $\forall x \; \exists c_x, \; |l_n(x)| \le c_x, \; n = 1, 2, \dots$, то $\exists \, C > 0$, що $\|l_n\| \le C$, $n = 1, 2, \dots$.

Зауваження. зокрема, при $\|x\| = 1$, з поточкової обмеженості на одиничній сфері $\Rightarrow$ рівномірна обм.

Д. Покажемо, що $\exists$ замкнена куля, на якій $|l_n(x)| \le C'$. Припустимо супротивне.

$B_{r_0}(x_0)$. $\Rightarrow \exists \, x_1 \in B_{r_0}(x_0), \; \exists \, n_1 \;\; |l_{n_1}(x_1)| > 1$.

$\Rightarrow$ ця нерівність виконується в деякому околі x_1, тобто $\exists$ відкрита куля $\overline{B}_{r_1}(x_1)$, $|l_{n_1}(x)| > 1$, $x \in \overline{B}_{r_1}(x_1)$

При цьому можна вважати $r_1 \le r_0/2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \, x_2 \in \overline{B}_{r_1}(x_1)$, n_2, $|l_{n_2}(x_2)| > 2$. $\Rightarrow \exists \, \overline{B}_{r_2}(x_2)$,

що $\forall x \in \overline{B}_{r_2}(x_2)$ $|l_{n_2}(x)| > 2$, можна вважати, що $r_2 \le r_1/2 \le r_0/4$. Продовжимо, $\Rightarrow \exists \, \overline{B}_{r_i}(x_i)$, n_i що $r_i \le r_0/2^i$, $\forall x \in \overline{B}_{r_i}(x_i)$ $|l_{n_i}(x_i)| > i$, $i = 1, 2, \dots$.

Оскільки E - повний $\Rightarrow \exists \, x_\infty \in \bigcap_i \overline{B}_{r_i}(x_i) \Rightarrow$

$|l_{n_i}(x_\infty)| > i$, $\forall i \Rightarrow l_n(x_\infty)$ необмежена.

$\Rightarrow \exists \, \overline{B}_r(a)$, що $\forall x \in \overline{B}_r(a)$ $|l_n(x)| \le C'$.

Досить довести, що l_n обмежена на одиничній кулі $\overline{B}_1(0)$. $\overline{B}_1(0) \ni x \mapsto x' = r \cdot x + a$

$\Rightarrow x = \frac{1}{r}(x' - a)$.

$$|l_n(x)| = \left|l_n\left(\tfrac{1}{r}(x' - a)\right)\right| = \frac{1}{r} |l_n(x') - l_n(a)| \le$$

$$\le \frac{1}{r}\left(|l_n(x')| + |l_n(a)|\right) \le \frac{2C'}{r}. \quad C = \frac{2C'}{r} \Rightarrow$$

$|l_n(x)| \le C$, $x \in \overline{B}_1(0) \Rightarrow \|l_n\| \le C$ ∎

Заув. Повнота E істотна.

Нехай $c_0 \subset \ell_\infty$ - підпростір послідовностей, що збігаються до 0, $\|x\| = \sup_k |x_k|$,

$c_{00} \subset \ell_\infty$ - підмножина послідовностей, що фінітні,

$c_{00} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0 \dots)$, $n \in \mathbb{N}$

Вправи 1) c_{00} - лінійний простір, неповний, його поповнення c_0

2) $(c_{00})' = \ell_1$.

Розглянемо $\ell_1 \ni f_p = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p}, 0, \dots)$, $\|f_p\|_1 = p$

$c_{00} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$, $f_p(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j$,

$\Rightarrow f_n(x) = f_{n+1}(x) = \dots$, $f_p(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $p \geq n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in c_{00}$ $\exists \lim f_p(x)$. але f_p необмежена.

Слабка та $*$-слабка збіжність.

E - л.н.п., $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

сильна збіжність

E' $\ell_n \to \ell \Leftrightarrow \|\ell_n - \ell\| \to 0$, $n \to \infty$.

Озн. $E \ni x_n \to x$ слабко, $x_n \xrightarrow{w} x$, $x = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, якщо $\forall \ell \in E'$ $\ell(x_n) \to \ell(x)$.

Озн $E' \ni \ell_n \to \ell$ $*$-слабко, якщо $\forall x \in E$ $\ell_n(x) \to \ell(x)$

Таким чином: на E є збіжність сильна, та слабка. На E' є збіжність: сильна, слабка, $*$-слабка

Слабка збіжність на E': $\ell_n \to \ell \Leftrightarrow \forall L \in (E')'$ $L(\ell_n) \to L(\ell)$

$*$-слабка збіжність на E': $\ell_n \to \ell \Leftrightarrow \forall L_x$ $L_x(\ell_n) \to L_x(\ell)$,

$L_x(\ell_n) = \ell_n(x)$

Збіжність на $E \subseteq E''$

Вправа. Якщо x_n слабко збігається, то границя єдина.

Т6. Якщо E - банахів, $E' \ni l_n \xrightarrow{w^*} l$, $*$-слабко, то l_n обмежено, тобто $\exists c : \|l_n\| \le c$, $n \ge 1$

$\forall x \in E$ $l_n(x)$ збіжна $\Rightarrow$ обмежена $\Rightarrow$ т. Б.-Ш. ∎

Т7. $x_n \to x$ сильно $\Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

$\forall l \in E'$ $\cancel{|l_n(x) - l(x)| = |l_1}$ $|l(x_n) - l(x)| =$

$= |l(x_n - x)| \le \|l\| \|x_n - x\| \to 0$. $n \to \infty$.

Пр. $E = l_p$, $1 < p < \infty$, $e_j = (0, ..0, 1, 0 ..)$

$\forall f \in E'$, $f \in l_{p'}$ $f(e_j) = f_j \to 0$, $j \to 0$

$\Rightarrow e_j \xrightarrow{w} 0$. $\|e_j - e_k\| \not\to 0$, $j, k \to \infty$

Т8. $E' \ni l_n \xrightarrow{w} l \Rightarrow l_n \xrightarrow{w^*} l$.

Т. Нехай E - банахів, E' $*$-слабко повний, тобто, якщо $\forall x \in E$ $l_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ фундаментальна, то $\exists l \in E'$, $l_n \xrightarrow{w^*} l$.

Д. $\forall x \in E$ $l_n(x)$ фундаментальна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} l_n(x) =: l(x)$

Тоді: l - лінійний. Обмеженість: з т. Б.-Ш.

$\|l_n\| \le c \Rightarrow |l_n(x)| \le c\|x\| \Rightarrow |l(x)| \le c\|x\|$

$\Rightarrow l \in E'$.

Зауваження. E взагалі кажучи, не повний відносно слабкої збіжності. Може існувати $x_n \in E$, що $\forall l \in E'$ $l(x_n) \to l(x)$, то можна довести, що $x_n \to x \in E''$

Якщо E рефлексивний, то він слабко повний

$x_n \xrightarrow{w} x \not\Rightarrow x_n \to x$ сильно.

Т. Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$, тоді $\exists$ послідовність скінченних лінійних комбінацій $\{x_j\}$, яка збігається до x сильно.

Д. Нехай $G =$ З.Л.О. $(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$. Треба довести $x \in G$.

Припустимо $x \notin G$ $(\Rightarrow x \neq 0) \Rightarrow \exists l \in E'$, $\|l\| = 1$

$\cancel{l(x) = \|x\|}$ $l(x) = \rho(x, G)$, $l|_G = 0$.

$\Rightarrow l(x_n) = 0 \Rightarrow l(x_n) \to 0 \neq l(x)$.

---

*-слабка топологія та тихоновські добутки.

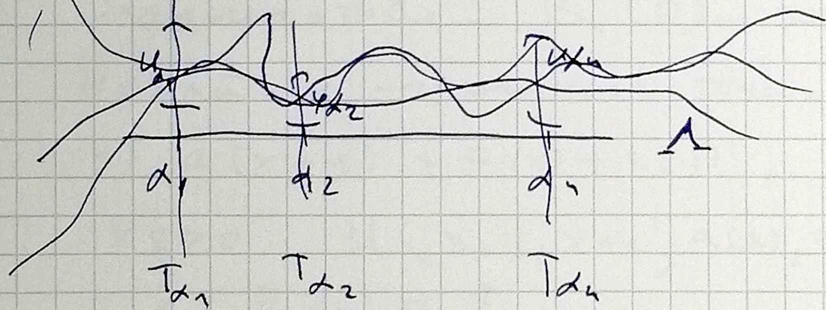
Озн. Нехай $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ - сім'я хаусдорфових топологічних просторів. $T = \prod_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha \ni a : \alpha \to a(\alpha) \in T_\alpha$

$a = b \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda \ a(\alpha) = b(\alpha)$.

Відкрита множина (окіл) $U(\alpha, U_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, U_α - окіл в T_α

$U(\alpha, U_\alpha) = \{a \in T \mid a(\alpha) \in U_\alpha\}$.

$U(\alpha_1, \dots, \alpha_n; U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}) = \{a \in T \mid a(\alpha_j) \in U_{\alpha_j}, j = 1, \dots, n\}$



Тихонівський добуток топологічних просторів $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

Т. Тихонова Якщо T_α, $\alpha \in \Lambda$ компакти, то T - тихоновський добуток - компакт.

Нехай E - банахів над $\mathbb{C}$. Розглянемо $\mathbb{C}^E = \prod_{x \in E} \mathbb{C}_x$

= м-на усіх ф-й на E зі значеннями в $\mathbb{C}$

$U(x, c, \varepsilon) = \{\varphi : E \to \mathbb{C} \mid |\varphi(x) - c| < \varepsilon\}$

$U(x, 0, \varepsilon) = \{\varphi \mid |\varphi(x)| < \varepsilon\}$

$U(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{\varphi : E \to \mathbb{C} \mid |\varphi(x_k) - c_k| < \varepsilon_k\}$, $k = 1, \dots, n$

Вправа $\varphi_n \to \varphi$ в тихоновській топології $\Leftrightarrow$

$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ $\forall x \in E$.

Зокрема, $E' \subset \mathbb{C}^E$,

Озн. Звуження тихоновської топології на E' називається $*$-слабкою топологією.

Теорема. E - банахів пр-р. Тоді $\overline{B_1}(0) = \{l \in E' \mid \|l\| \leq 1\}$ - компакт в $*$-слабкій топології в E'.

Д. $\overline{B_1}(0) \ni l \Leftrightarrow \forall x \in E \quad |l(x)| \leq \|x\| \Rightarrow$

$\overline{B_1}(0) \subseteq B = \prod_{x \in E} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|x\|\}$. - компакт

Залишається: $\overline{B_1}(0)$ - замкнена в B.

Нехай a - гранична точка $\overline{B_1}(0)$.

1) $a(x+y) = a(x) + a(y)$, $x, y \in E$

$\forall \varepsilon > 0 \quad U(x, y, x+y; a(x), a(y), a(x+y); \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow$

$\exists\, l \in \overline{B_1}(0) \cap U$

$|a(x+y) - a(x) - a(y)| = |a(x+y) - l(x+y) + l(x) + l(y) - a(x) - a(y)|$

$\leq |a(x+y) - l(x+y)| + |a(x) - l(x)| + |a(y) - l(y)| < 3\varepsilon$.

2). Обмеженість. Фіксуємо $x \in E$, $\varepsilon > 0$, тоді в околі

$U(x; a(x); \varepsilon)$ $\exists\, l \in B_1(0) \Rightarrow |a(x)| = |a(x) - l(x) + l(x)|$

$\leq |a(x) - l(x)| + |l(x)| < \varepsilon + \|l\|\,\|x\| \leq \varepsilon + \|x\| \Rightarrow |a(x)| \leq \|x\|$

$\Rightarrow a \in \overline{B_1}(0)$. ▣