Формула Коші: Γ - замкнений контур, котрий обмежує область D, F - аналітична в D

$$\forall z \in D \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\omega)}{\omega - z}\,d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\omega)}{z-\omega}\,d\omega$$

$$E = \mathbb{C},\quad A = z \qquad = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\omega)\underbrace{\left(\frac{1}{z-\omega}\right)}_{R_\omega(A)}d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\omega)R_\omega\,d\omega$$

Інтеграли від ~~операторних~~ векторнозначних ф-ій.

E - Б.п. $\mathbb{C} \ni z \to x(z) \in E$.

Інтеграл Рімана: $z_0, z_1, \dots, z_{n+1}$, $\xi_j \in z_{j-1}, z_j$

$\sum_{j=0}^{n-1} (z_{j+1} - z_j)\, x(\xi_j)$ - інтегр. суми $\to \int_\Gamma x(\omega)\,d\omega$.

Інтеграл Бохнера. $(R, \mathfrak{B}, \mu)$ - простір з мірою

$R \ni t \to x(t)$ - відобр. з $R \to E$

Проста ф-я $f(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j}(t)$, $E_j \cap E_k = \emptyset$

$\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, \dots, n$

$\|f(t)\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \chi_{E_j}(t)$.

Озн Інтеграл Бохнера від простої ф-ї

$$\int_R f(t)\,d\mu(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\mu(E_j).$$

Вправа 1) Перевірити, що $\int_R (\alpha f + \beta g)(t)\,d\mu(t) = \alpha\int_R f(t)\,d\mu(t) + \beta\int_R g(t)\,d\mu(t)$

2) $\left\|\int_R f(t)\,d\mu(t)\right\| \le \int \|f(t)\|\,d\mu(t)$.

Озн. $f: R \to E$ сильно вимірна, якщо $\exists f_n$ - простих ф-ій, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n\to\infty}\|f_n(t) - f(t)\| \to 0 \mod \mu$

Зауваження! f - сильно вимірна, то $\|f(t)\|$ - вимірна

Нехай f - сильно вимірна, причому

$$\int_R \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu(t) \to 0, \ n \to \infty,$$

Тоді: $\int_R f_n(t)\, d\mu(t)$ - фундаментальна. Справді:

$$\left\|\int_R f_n(t)\, d\mu(t) - \int_R f_m(t)\, d\mu(t)\right\| = \left\|\int_R (f_n(t) - f_m(t))\, d\mu(t)\right\|$$

$$\le \int_R \|f_n(t) - f_m(t)\|\, d\mu(t) = \int_R \|f_n(t) - f(t) + f(t) - f_m(t)\|\, d\mu(t)$$

$$\le \int_R \|f_n(t) - f(t)\|\, d\mu(t) + \int_R \|f_m(t) - f(t)\|\, d\mu(t) \to 0$$

E - банахів $\Rightarrow \exists \lim \int_R f_n(t)\, d\mu(t) =: \int_R f(t)\, d\mu(t)$

Озн. $f: R \to E$ інтегровна за Бохнером, якщо
$\exists f_n: R \to E$ простих ф-й: $\|f_n(t) - f(t)\| \to 0 \mod \mu$,

$$\int_R \|f_n(t) - f(t)\|\, d\mu(t) \to 0.$$

Вправа Інтеграл не залежить від вибору f_n.

Т. Нехай $f: R \to E$ сильно вимірна, тоді:

f інтегровна за Бохнером $\Leftrightarrow \|f(t)\| \in L_1(R, d\mu)$.

Д. $\Rightarrow$ $f_n \to f \mod \mu$. Тоді: $\forall n \ \int_R \|f_n(t)\|\, d\mu < \infty$

$$\int_R \|f_n - f\|\, d\mu \to 0 \Rightarrow \int_R \|f(t)\|\, d\mu(t) =$$

$$\le \int_R \|f(t) - f_n(t)\|\, d\mu(t) + \int_R \|f_n(t)\|\, d\mu(t) < \infty.$$

$\Leftarrow$ f - сильно вимірна, $\|f(t)\| \in L_1(R, d\mu)$,

$f_n \to f \mod \mu$. Покладемо $g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\| \\ 0 & \text{в інш. випад.} \end{cases}$

$\Rightarrow g_n(t) \to f(t) \mod \mu$. $\|g_n(t)\| \le 2\|f(t)\|$

$$\int_R \|g_n(t) - f(t)\|\, d\mu \le \int 3\|f(t)\|\, d\mu \Rightarrow \int \|g_n(t) - f(t)\|\, d\mu \to 0. \ \blacksquare$$

$\mathbb{R} \ni t \to A(t) \in L(E_1, E_2)$, E_1, E_2 - б. пр.

Т. Нехай $A: \mathbb{R} \to L(E_1, E_2)$ інтегровна за Бохнером, нехай $x \in E_1$. Тоді $A(t)x$ інтегровна за Бохнером, причому

$$\int_{\mathbb{R}} A(t)x \, d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} A(t) \, d\mu \; x.$$

Д. $A(t)$ сильно вимірна, $A_n(t) \rightrightarrows A(t)$ mod μ, тоді: $A_n(t)x$ - проста векторнозначна ф-я,

$$\|A_n(t)x - A(t)x\| = \|(A_n(t) - A(t))x\| \le \|A_n(t) - A(t)\| \|x\| \to 0 \text{ mod } \mu$$

$\Rightarrow A(t)x$ - сильно вимірна: $\mathbb{R} \to E_2$.

$A(t)$ - інт. за Бохнером $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|A(t)\| d\mu(t) < \infty$, тоді:

$$\int \|A(t)x\| d\mu(t) \le \int \|A(t)\| \|x\| d\mu(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \|A(t)\| d\mu(t) \|x\| < \infty. \Rightarrow A(t)x \text{ інт. за Бохнером}$$

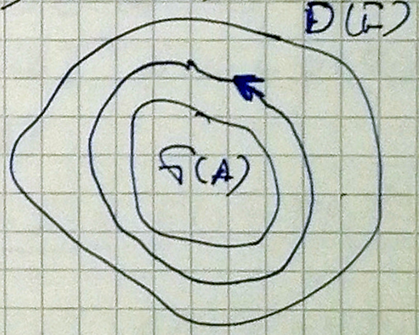
$\boxtimes$

Аналітичні ф-ї від оператора.

E - б. пр. $A \in L(E)$ $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналітична в деякій області $D(F)$, $D(F) \supset \sigma(A)$

Γ - контур $\subset D(F)$

і охоплює $\sigma(A)$



м-на ф-й, аналітичних в деякому околі $\sigma(A)$ $\mathcal{A}(\sigma(A))$.

$\mathcal{A}(\sigma(A))$ - алгебра

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) R(z) dz.$$

$\forall l \in E'$, $\forall x \in E$ $\quad l(F(A)x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z)\, l(R(z)x) dz$

Теорема $\varphi : \mathcal{A}(\sigma(A)) \to F \mapsto F(A) \in L(E)$.

φ - гомоморфізм алгебри $\mathcal{A}(\sigma(A)) \to L(E)$,

причому $\varphi(1) = I$, $\varphi(z) = A$.

Доведення. $F, G \in \mathcal{A}(\sigma(A))$, $\alpha F + \beta G$

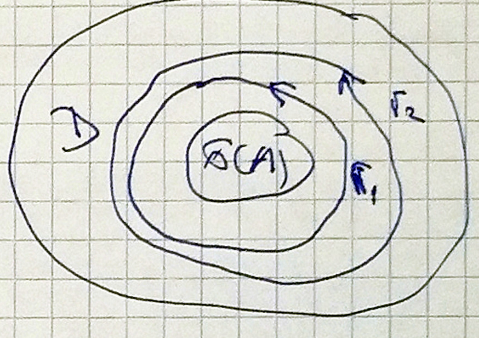
$$(\alpha F + \beta G)(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha F(z) + \beta G(z)) R_z(A)\, dz =$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi i}\int_\Gamma F(z) R_z\, dz - \frac{\beta}{2\pi i}\int_\Gamma G(z) R_z\, dz = \alpha F(A) + \beta G(A)$$

Покажемо, $(FG)(A) = F(A)G(A)$.

F анал. в $D(F)$, G - аналіт. в $D(G)$, $D(F), D(G) \supset \sigma(A)$

$D = D(F) \cap D(G) \supset \sigma(A)$



нехай Γ_1 лежить всередині Γ_2

$$F(A)G(A) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} F(z) R_z(A)\, dz \times$$

$$\times \int_{\Gamma_2} G(z) R_z(A)\, dz = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} F(z) R_z(A) G(\omega) R_\omega(A)\, d\omega\, dz =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} F(z) G(\omega) \underbrace{R_z(A) R_\omega(A)}\, d\omega\, dz =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} F(z) G(\omega) \frac{R_z(A) - R_\omega(A)}{z-\omega}\, d\omega\, dz$$

$$\cancel{= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\left(\int_{\Gamma_2} G(\omega) \frac{R_\omega(A)}{z-\omega}\, d\omega\right) F(z)\, dz +}$$

$$\cancel{+ \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_2}\left(\int_{\Gamma_1} F(z) \frac{R_z(A)}{z-\omega}\right) dz\, G(\omega)\, d\omega.}$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\left(\underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{G(\omega)}{z-\omega}\, d\omega}_{=G(z)}\right) F(z) R_z(A)\, dz -$$

$$- \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_2}\left(\underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{F(z)}{z-\omega}\, dz}_{\sim 0}\right) G(\omega) R_\omega\, d\omega$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_2}\left(\int_{\Gamma_1} \frac{G_1(\omega)}{z-\omega}\, d\omega\right) F(z) R_z(A)\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} G(z)F(z)R_z(A)\,dz = (FG)(A).$$

$$1 \to \varphi(1) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma 1\cdot R_z(A)\,dz.$$

$$R_z(A) = (A-zI)^{-1} = -\frac{1}{z}\left(I - \frac{1}{z} A\right)^{-1} = -\frac{1}{z}\left(I + \frac{A}{z} + \frac{A^2}{z^2}+\dots\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma -\frac{1}{z}\, \frac{A^k}{z^k}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma -\frac{1}{z}\,\frac{1}{z^k}\,dz\, A^k = 1\cdot A^0 = I.$$

$$z\to\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int z R_z(A)\,dz = A \quad \blacksquare$$

Наслідок $F, G \in \mathcal{A}(\sigma(A))$, $F(A)G(A) = G(A)F(A)$.

Теорема Данфорда про відображення спектрів.

Нехай $F\in\mathcal{A}(\sigma(A))$, $\sigma(F(A)) = F(\sigma(A))$.

Д. $\sigma(F(A)) \subseteq F(\sigma(A))$. Нехай $\omega\notin F(\sigma(A))$.

Покажемо, що $\omega\in\rho(F(A))$. $G(z) = (F(z)-\omega)^{-1}\in\mathcal{A}(\sigma(A))$

Розглянемо $G(A)$. Оскільки $G(z)(F(z)-\omega)=1$

$I = G(A)\varphi(F(z)-\omega) = G(A)(F(A)-\omega I) \Rightarrow \omega\in\rho(F(A))$.

$\sigma(F(A)) \supseteq F(\sigma(A))$. Нехай $\lambda\in\sigma(A)$

$G(z) = \frac{F(z)-F(\lambda)}{z-\lambda}$, $G(z)(z-\lambda) = F(z)-F(\lambda)$

$G(A)(A-\lambda I) = F(A) - F(\lambda)I$. Якщо $F(\lambda)\notin\sigma(F(A))$,

то $\exists\, (F(A)-F(\lambda)I)^{-1}$ $\cancel{\Rightarrow G(A) \quad = I}$

$$I = \underbrace{(F(A)-F(\lambda)I)^{-1}G(A)}_{=(A-\lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)}(A-\lambda I),$$ але $\lambda\in\sigma(A)$. $\blacksquare$

Теорема. Нехай $F \in \mathcal{A}(\sigma(A))$, $G \in \mathcal{A}(\sigma(F(A)))$, тоді $H = G \circ F \in \mathcal{A}(\sigma(A))$, і $H(A) = G(F(A))$.