E - банахів $x(t)$, $t \geq 0$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \qquad x(t) = e^{At}x(0).$$

$$t \to A, \quad t^2 \to A^2, \quad t^n \to A^n, \quad p(t) \to P(A)$$

$$\frac{1}{1-t} \mapsto (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{t-z} \mapsto (A - zI)^{-1} = R_z(A).$$

Озн. Будемо казати, що побудовано <u>функціональне числення</u> для деякого класу ф-ій F на $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ та деякого класу операторів, якщо задано $\forall A$ з класу відображення $F \mapsto L(E)$

$$0(x) \mapsto 0 \in L(E)$$
$$1(x) \mapsto I \in L(E)$$
$$x \mapsto A,$$
$$(f_1 + f_2)(x) \mapsto f_1(A) + f_2(A),$$
$$\lambda f(x) \mapsto \lambda f(A)$$
$$f_1(x) f_2(x) \mapsto f_1(A) f_2(A)$$
$$P(x) \mapsto P(A).$$

$\dim E < \infty$

A задається матрицею.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Розклад Жордана $A \sim J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$

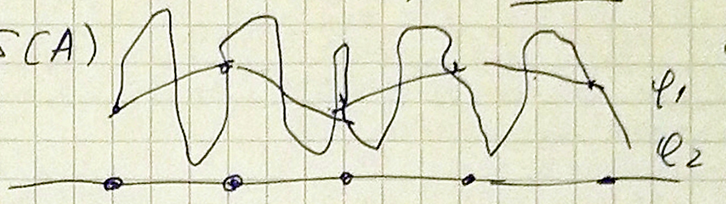
$$J_{n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad A \sim \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

$\lambda_j \in \sigma(A)$

<u>Вправа</u> $f(J_{n_j}(\lambda_j)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_j)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} \\ 0 & & & f(\lambda_j) \end{pmatrix}$

1) $f(J_n(\lambda))$ залежить лише від $f(\lambda), \dots, f^{(n-1)}(\lambda)$

2) $\forall A$ - матриці $f(A)$ залежить тільки від значень f та її похідних лише в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \sigma(A)$



$\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$

3) $A = A^*$, то ~~можна~~ $\exists$ ортонормований власний базис A, тобто

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & 0 \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k I \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \\ & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad P_k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

P_j - проектори на власні підпростори A,

$A P_j x = \lambda_j P_j x$,

Тоді $\quad I = P_1 + P_2 + \dots + P_k, \quad A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$

$H_j = R(P_j) \qquad H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$

Спектральна теорема для компактного самоспряженого о-ра в гільб. пр-рі.

$b(x, y)$ - білінійна, обмежена, якщо

$\forall x, y \in H \qquad |b(x,y)| \le \|b\| \, \|x\| \, \|y\|$.

$\forall \, b(x,y) = (Ax, y), \quad A \in L(H), \quad \|A\| = \|b\|$

b - ермітова, $\quad b(x,y) = \overline{b(y,x)} \Leftrightarrow A = A^*$

Лема Нехай b – ермітова обмежена білінійна

Тоді: $\|b\| \overset{df}{=} \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |b(x,y)| = \sup\limits_{\|x\|=1} |b(x,x)| =: \|b\|_1$

Д. Очевидно, $\|b\|_1 \le \|b\|$.

$b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y) = \cancel{2(b(x,y) + b(y,x))}$

$= b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) -$

$-(b(x,x) - b(x,y) - b(y,x) + b(y,y)) = 2(b(x,y) + b(y,x))$

$|b(x,y) + b(y,x)| \le \frac{1}{2}(|b(x+y, x+y)| + |b(x-y, x-y)|)$

$\le \frac{1}{2}\|b\|_1(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \|b\|_1(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Нехай $\|x\| = \|y\| = 1$, тоді: $|b(x,y) + b(y,x)| \le 2\|b\|_1$

$y \to \lambda y$, $|\lambda| = 1$ $\quad b(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\, b(x,y)$

$\exists \lambda: \bar{\lambda}\, b(x,y) \ge 0$, $\quad b(\lambda y, x) = \overline{b(x, \lambda y)} \ge 0$

$|b(x, \lambda y) + b(\lambda y, x)| = 2|b(x, \lambda y)| \le 2\|b\|_1$

$\Rightarrow \forall x, y$, $\|x\| = \|y\| = 1$: $|b(x,y)| \le \|b\|_1 \Rightarrow \|b\| \le \|b\|_1$. ∎

Теорема. A – компактний, $A = A^* \in L(H)$.

Тоді: $\exists \lambda$, $|\lambda| = \|A\|$, λ – власне значення A.

Д. $b(x,y) = (Ax, y)$ ермітова, $\|A\| = \|b\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$.

$\Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$ $\quad |(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$

$A \in K(H) \Rightarrow$ з $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ можемо виділити

збіжну $Ax_{n_k} \to \psi \in H$. Позначимо $y_k = x_{n_k}$

$|(Ay_n, y_n)| \to \|A\|$, $\quad A = A^*$, $\quad (Ay_n, y_n) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lambda = \pm\|A\|$, $\exists y_{k_j}$: $(Ay_{k_j}, y_{k_j}) \to \lambda$.

$\lim\limits_{j \to \infty} \|Ay_{k_j} - \lambda y_{k_j}\| \overset{?}{=} 0$

$\|Ay_{k_j} - \lambda y_{k_j}\|^2 = (Ay_{k_j} - \lambda y_{k_j}, Ay_{k_j} - \lambda y_{k_j}) =$

$= \|Ay_{k_j}\|^2 - \underbrace{\lambda(Ay_{k_j}, y_{k_j})}_{\to\lambda^2} - \underbrace{\lambda(y_{k_j}, Ay_{k_j})}_{\to\lambda^2} + \lambda^2 \underbrace{\|y_{k_j}\|^2}_{=1}$

$\Rightarrow \|Ay_{k_j}\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \cancel{\|Ay_{k_j}\|}\ \|\psi\|^2 - \lambda^2 \ge 0$

З іншого боку, $\psi = \lim Ay_{k_j}$, $\|Ay_{k_j}\| \le \|A\| \Rightarrow$

$\|\psi\|^2 \le \|A\|^2$, $\lambda^2 = \|A\|^2$, $\|\varphi\|^2 \ge \|A\|^2$

$\|Ay_{k_i} - \lambda y_{k_i}\| \to 0 \Rightarrow \exists \lim y_{k_i} = \varphi$, $\lambda\varphi = \psi \in A$

$\Downarrow$

ψ

$\psi = \lim\limits_{i\to\infty} Ay_{k_i} = A \lim\limits_{i\to\infty} y_{k_i} = A\varphi = \lambda\varphi$ $\boxtimes$.

<u>Лема</u> $A = A^* \in L(H)$. 1) λ - власне значення $A \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\lambda_1 \ne \lambda_2$ - власні значення A, x_1, x_2 - власні вектори

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow x_1 \perp x_2$, $(\Leftrightarrow (x_1, x_2) = 0)$.

<u>Д</u>. 1) $\cancel{x} \in H$ $Ax = \lambda x$,

1) $\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$.

2) $\lambda_1 \ne \lambda_2$ $\underline{\lambda_1(x_1, x_2)} = (\lambda_1 x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) =$

$= (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \underline{\lambda_2(x_1, x_2)} \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$. $\boxtimes$

$A \in L(H)$, $H_1 \subset H$ інваріантний підпростір A, якщо $\forall x \in H_1$ $Ax \in H_1$.

$H_2 = H_1^\perp$, $H = H_1 \oplus H_2$, $\forall x \in H$ $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$, $x_1 \perp x_2$

$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$

$A \in L(H)$ $Ax = Ax_1 + Ax_2 = \underbrace{(Ax_1)_1}_{\in H_1} + \underbrace{(Ax_1)_2}_{\in H_2} +$

$+ (Ax_2)_1 + (Ax_2)_2$

$A_{11}: H_1 \to H_1$ $A_{11} x_1 = (Ax_1)_1$, $A_{jk}: H_j \to H_k$, $i = 1, 2$

$A_{jk} x_k = (Ax_k)_j$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

H_1 - інваріантний $\Leftrightarrow AH_1 \subset H_1$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Ax = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 \\ A_{21}x_1 \end{pmatrix} \in H_1 \Leftrightarrow A_{12}x_1 = 0 \Leftrightarrow A_{21} = 0$

H_1 - інв. відносно $A \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$

Вправа: якщо $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Лема. Нехай $A = A^*$, $AH_1 \subset H_1 \Rightarrow$
$AH_1^\perp \subset H_1^\perp$

Д. $AH_1 \subset H_1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_{12} = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. ☒

I. Нехай $A = A^* \in K(H)$, нехай
$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots \geq |\lambda_n| > \dots > 0$ усі власні значення,
нехай P_n - проектор на H_n - власний підпростір A, що відповідає λ_n,
Тоді: $\forall x \in H$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} P_j x + P_0 x, \quad P_0 \text{ - проектор на } \operatorname{Ker} A,$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x.$$

Д. $\exists x_1 : Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $|\lambda_1| = \|A\|$.
H_1 - сукупність всіх власних в-рів A, $Ax = \lambda_1 x$, $x \in H_1$.

$\Rightarrow AH_1 \subset H_1 \Rightarrow AH_1^\perp \subset H_1^\perp$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$

Розглянемо $H_1^\perp$ і $A_1 \in L(H_1^\perp) \Rightarrow$
$\exists \lambda_2 \neq \lambda_1 \; \exists x_2 \quad A_1 x_2 = \lambda_2 x_2$, $\quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$
~~$H_1^\perp = H_2$~~ H_2 - сукупність $x \in H_1^\perp : Ax = \lambda_2 x$.
$(H_1 \oplus H_2)^\perp$ $\quad A_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 I & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & 0 \\ & \lambda_2 I & \\ 0 & & A_2 \end{pmatrix}$

Продовжимо $\forall n \Rightarrow \exists H_n \subset H$, $\forall x \in H_n \; Ax = \lambda_n x$
P_n - проектор на H_n $\quad H' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$

Тоді $(H')^\perp = \underbrace{\operatorname{Ker} A}_{H_0}$, $\Rightarrow H = \bigoplus_{n=1}^{\leq\infty} H_n \oplus H_0$

$\Rightarrow \forall x = \sum_{j=1}^{\leq\infty} P_j x + P_0 x$, $\quad Ax = \sum_{j=1}^{\leq\infty} \lambda_j P_j x$ ☒

Наслідок. $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x$

$\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

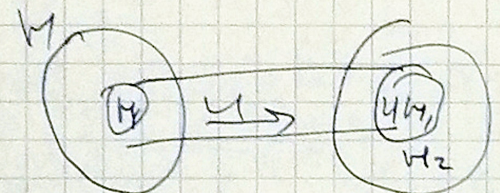
$f(A)x = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j) P_j x + f(0)P_0$ — функціональне числення компактного с.с.о.

$H = H_0 \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_j$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \lambda_1 I & & & 0 & \\ & & \lambda_2 I & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \lambda_n I & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$A \geq 0 \Rightarrow \lambda_j \geq 0$ тоді визначено $\sqrt{A} \geq 0$

Означення U — часткова ізометрія, якщо $\exists H_1 \subset H$, що $\|Ux\| = \|x\|,\ x \in H_1$, $Ux = 0,\ x \in H_1^{\perp}$



Вправа U — ч.і. $\Leftrightarrow U^*U = P_1,\ UU^* = P_2$, де P_1, P_2 — проектори, P_1 — проектор на H_1, P_2 — проектор на $H_2 = R(U)$

Т. (Полярний розклад оператора)

$A \in K(H)$, тоді існує ч.і. U: $A = U|A|$, $|A| = \sqrt{A^*A}$. Якщо $\ker U = \ker A$, тоді U єдиний.
