$A \in K(E)$, $T = A - I$

$Tx = y$, $T^* l = m$, $Tx = 0$, $T^* l = 0$, y, m - фікс.

$x, y \in E$, $l, m \in E'$

$(R, \mathfrak{A}, \mu)$ - пр-р з мірою,

E - пр-р функцій на R

$$(Af)(t) = \int_R K(t,s) f(s) \, d\mu(s), \quad K(t,s) \text{ - ядро } A$$

<u>Рівняння Фредгольма</u> I роду. Для $y \in E$

$$\int_R K(t,s) f(s) \, ds = y(t) \qquad Af = y$$

$\overline{II}$ роду: для фіксованої y знайти f:

* $$\int K(t,s) f(s) \, ds - f(t) = y(t) \qquad (A - I) f = y$$

<u>Пр</u> $E = L_2(R, d\mu)$, $K \in L_2(R \times R, d\mu \otimes d\mu)$.

$$A^* = \int_R \overline{K(s,t)} \, l(s) \, d\mu(s).$$

** Спряжене рівняння $\int_R \overline{K(s,t)} \, l(s) d\mu(s) - l(t) = m(t)$.

<u>T.</u> Рівняння * має розв'язок для тих і лише тих y, для яких

$$\int_R y(t) \overline{l(t)} \, d\mu(t) = 0 \quad \forall l : \int_R \overline{K(s,t)} \, l(s) \, d\mu(s) = 0$$

<u>T.</u> Рівняння * має (єдиний) розв'язок для довільного $y \in L_2(R, d\mu) \Leftrightarrow$

$\int_R K(t,s) \, x(s) \, d\mu(s) = 0$ має лише трив. розв'язок $x \equiv 0$

<u>T.</u> Підпростори розв'язків однорідних р-нь

$$\int_R K(t,s) f(s) \, d\mu(s) = 0 \quad \text{та} \quad \int_R \overline{K(s,t)} \, l(s) \, d\mu(s) = 0$$

скінченновимірні та мають однакову кількість лінійно незал. елементів.

Спектр компактного оператора.

Т. $A \in K(E)$, $\dim E = \infty$.

1) $\sigma(A)$ – не більш, ніж злічена м-на $\{|\lambda| \le \|A\|\}$, причому $0 \in \sigma(A)$.

2) $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ – власне значення A скінченної кратності.

3) 0 – єдина гранична точка $\sigma(A)$.

Д $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $(A - \lambda I)x = y \Leftrightarrow$ $(\frac{1}{\lambda} A - I)x = y$, а) рівняння має розв'язок $\forall y \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$ б) $(\frac{1}{\lambda} A - I)x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq 0 \in Ker(\frac{1}{\lambda} A - I)$. $\Leftrightarrow$ $Ax = \lambda x$.

Доведемо, що $\forall r > 0$ зовні круга радіуса r лежить не більше, ніж скінченна к-ть точок $\sigma(A)$

Припустимо супротивне $\Rightarrow \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ $\|x_j\| = 1$

$Ax_j = \lambda_j x_j$, $\lambda \neq 0$. $|\lambda| > r$. $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$

$\forall n \geq 1$ система власних в-рів $x_1, \ldots, x_n$ лінійно нез.

$n = 1$. $x_1 \neq 0$. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – лін. нез.

Нехай $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. $Ax_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1} =$
$= \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right) x_j = 0 \Rightarrow c_j \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right) = 0.$

$G_1 = л.о. \{x_1\}, \ldots, G_n = л.о. \{x_1, \ldots, x_n\} \ldots,$ $G_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$

причому $G_n \neq G_{n+1}$. $\Rightarrow \forall n$ $\exists y_n$, $\|y_n\| = 1$, що $\forall x \in G_{n-1}$ $\|y_n + x\| > \frac{1}{2}$.

$n > m$ $\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n + \underbrace{(Ay_n - \lambda_n y_n)} - y_m + \underbrace{(Ay_m - y_m)}\| \geq$

$Ay_m, y_m \in G_{n-1}$, $m < n$, $y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$Ay_n - \lambda_n y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_n x_j = \sum_{j=1}^{n-1} c_j (\lambda_j - \lambda_n) x_j \in G_{n-1}$

$\geq |\lambda_n| \frac{1}{2} > \frac{r}{2}$. ∎

Спектральний радіус оператора.

E - банахів, $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset L(E)$

Розглянемо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k A_k$, $z \in \mathbb{C}$.

Лема Нехай для $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ послідовність $|z|^n \|A_n\|$ обмежена $\Rightarrow \forall z : |z| < |z_0|$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k A_k$ збіжна.

Д. $\left\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} z^k A_k \right\| \le \sum\limits_{k=n}^{n+p} |z|^k \|A_k\|$

$\Rightarrow$ при $|z| < |z_0|$ ряд збігається.

Лема $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A_n\|}$. Тоді радіус збіжності ряду $\sum\limits_{j=1}^{n} z^j |A_j| = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$

Доведення. Зводиться до числ. ряду $\sum\limits_{j=1}^{\infty} z^j \|A_j\|$. Нас будуть цікавити $\sum\limits_{j=1}^{\infty} z^j A^j$, $\|A^{j+k}\| \le \|A^j\| \|A^k\|$.

Лема Нехай $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ $\alpha_j > 0$, для якої $\alpha_{j+k} \le \alpha_j \alpha_k$ $\forall j, k$. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} < \infty$.

Д. $\alpha_n \le \alpha_1 \alpha_{n-1} \le \alpha_1^2 \alpha_{n-2} \dots \le \alpha_1^n$

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$. Тоді $n = m_n k + l_n$, $l_n < k$.

$\alpha_n \le \alpha_k^{m_n} \alpha_{l_n}$, $\alpha_n^{1/n} \le \alpha_k^{\frac{m_n}{n}} \alpha_{l_n}^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\alpha_k^{\frac{m_n}{m_n k + l_n}}}_{\to \alpha_k^{1/k}} \underbrace{\alpha_{l_n}^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha_n^{1/n} \le \alpha_k^{\frac{1}{k}}$ $\forall k \Rightarrow$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha_n^{1/n} \le \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \alpha_k^{1/k} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{1/k}$.

Озн. Спектральний радіус о-ра A:

$\rho(A) = \max\limits_{z \in \sigma(A)} |z|$.

Т. $A \in L(E)$, тоді: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. $(\leq \|A\|)$

Д. $\|A^{i+k}\| \leq \|A^i\| \|A^k\|$ $\quad \alpha_n = \|A^n\|$.

$R_z = (A - zI)^{-1}$ аналітична за межами кругу, що містить спектр, $\overline{B_{\rho(A)}(0)}$.

$f(z) = R_{\frac{1}{z}}(A) \Rightarrow f$ - аналітична всередині кругу з радіусом $\frac{1}{\rho(A)}$. $\qquad \|A^n\| \leq \|A\|^n$

$f(z) = (A - \frac{1}{z} I)^{-1} = -z (I - zA)^{-1}$,

при $|z| < \|A\|$

$= -z \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^i A^i$, радіус збіжності:

$= \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}\right)^{-1}$. $\boxed{\Sigma}$

<u>Розв'язання р-нь II роду.</u> $(A - \lambda I) x = y$.

$\Leftrightarrow (1 - \frac{1}{\lambda} A) x = \frac{1}{\lambda} y$, $\quad |\frac{1}{\lambda}| \|A\| < 1$

$z = \frac{1}{\lambda}$ Розглянемо $(1 - zA) x = y$, $|z| < \frac{1}{\|A\|}$

$(1 - zA)^{-1} = 1 + A + A^2 + \dots \Rightarrow$

$x = y + Ay + A^2 y + \dots A^n y \dots$

$F(x) = Ax + y$, $\quad \underbrace{F(x) = x}\Leftrightarrow Ax - x = -y$.

якщо $\|A\| = q < \infty$ $\quad$ <u>Вправа</u>: тоді F - стискаюче, тобто $\|F(x) - F(x')\| \leq q\|x - x'\|$

$x_1 = F(x_0) = y + Ax_0$

$x_2 = F(x_1) = y + Ay + A^2 x_0$

$\dots \quad x_n = F(x_{n-1}) = y + Ay + A^2 y + \dots + A^{n-1} y + A^n x_0$

Т. $A \in L(E)$, $\rho(A) < 1$, тоді: $x - Ax = y$ коректно розв'язне.

Заув. Умова $\rho(A) < 1$ менш жорстка, ніж $\|A\| \le 1$.

Пр. $E = \mathbb{C}^n$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & * \\ O & \ddots & 0 \end{pmatrix}$

$\|A\|$ може бути великою, але $\rho(A) = 0$

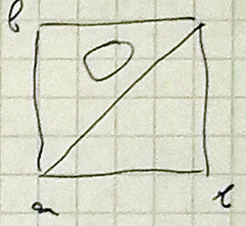
Вправа $A^n = 0$

Пр. Інтегральні оператори Вольтерра.

$E = L_2([a,b], dt)$

$(Af)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds$ — о-р Вольтерра,

якщо $K(t,s) = 0$, $s > t$



Тв. $\rho(A) = 0$.

Тобто рівняння $Ax - x = y$ розв'язується методом послідовних наближень.