E - л.н.п. $A: E \to E$ компактний,
якщо образ $\forall$ обм. $G \subset E$ передкомпактне
$\dim E = \infty$ $\quad I \notin K(E)$, $\quad S_2(H) \subset K(E)$.
$\dim R(A) < \infty \Rightarrow A \in K(E)$, $\quad K(E)$ - замкнена

Рівняння з компактними операторами.

$E \supset T \in L(E)$ $\qquad Tx = y$, y - заданий елемент E
$y \in R(T)$
H - гільбертів. $\quad (R(A))^{\perp} = Ker(A^*)$
$y \in R(A)$ $\qquad a \in H$,
$\forall y \quad 0 = (y, a) = (Tx, a) = (x, T^* a) \Rightarrow T^* a = 0 \Rightarrow a \in Ker T^*$.
Якщо $R(A)$ - замкнений, то $R(A) = (Ker(A^*))^{\perp}$.

Для банахового E $\quad 0 = l(y) \Leftrightarrow l \in Ker^*$.
$Tx = y$ розв'язне $\Leftrightarrow$ $l(y) = 0$ $\forall y \in Ker T^*$
$T^* l = m$ розв'язне $\Leftrightarrow$ $m(x) = 0$ $\forall x \in Ker T$
$Tx = y$ має розв'язок $\forall y \Leftrightarrow Ker T = 0$
$\dim Ker T = \dim Ker T^*$.

$T = A - I$, $\quad A \in K(E)$.
Лема $\quad T = A - I$, $A \in K(E) \Rightarrow Ker(T)$ скінченновимірне

Д. $M \subset Ker T$, $\Leftrightarrow \forall x \in M \quad Tx = 0 \Leftrightarrow Ax = x$.
$\Rightarrow AM = M$. ~~$A \mathcal{E}$~~ Нехай M обмежена,
оскільки $A \in K(E) \Rightarrow M = AM$ передкомпактна.
$\Rightarrow \dim Ker(T) < \infty$.

Лема $T = A - I$ ~~компактний~~, $A \in K(E) \Rightarrow$
$R(T)$ замкнений.

Покажемо що $\exists c$, що залежить лише від T, що $\forall y \in R(T)\ \exists x$:
$Tx = y$, $\|x\| \le c\|y\|$. $\boxed{\exists T^{-1} \Leftrightarrow \|Tx\| \ge c^{-1}\|x\| \ \forall x}$

Ми покажемо, що серед розв'язків $Tx = y$
$\exists$ мінімальний x_0, $\|x_0\| \le \|x\|\ \forall x: Tx = y$
x_0, x_1 - розв'язки $Tx = y$, $Tx_0 = y$, $Tx_1 = y \Rightarrow$
$T(x_0 - x_1) = y - y = 0$, тобто $x_0 - x_1 \in \operatorname{Ker} T$,
тобто $x_1 = x_0 + z$, $z \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Tz = 0$
$d = \inf \|x_0 + z\| = \inf\{\|x\| : Tx = y\}$.
$\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker} T$, що $\|x_0 + z_n\| \to d$.
$\Rightarrow$ послідовність $\|x_0 + z_n\|$ обмежена $\Rightarrow$
$\Rightarrow \|z_n\| = \|x_0 + z_n - x_0\| \le \|x_0\| + \|x_0 + z_n\|$
обмежена. $\{z_n\} \subset \operatorname{Ker} T \Rightarrow \exists z_{n_k} \to z_0 \in \operatorname{Ker} T$
$\|x_0 + z_0\| = \lim_{n_k \to \infty} \|x_0 + z_{n_k}\| = d \Rightarrow \exists$ мінімальний розв'язок $\hat{x} = x_0 + z_0$.

Припустимо $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in R(T)$ $\underline{\|\hat{x}_n\| > n\|y_n\|}$
$\hat{x}_n$ - мінімальний $T\cancel{x} = y_n$.
$\hat{\xi}_n = \dfrac{\hat{x}_n}{\|\hat{x}_n\|}$, $\eta_n = \dfrac{y_n}{\|\hat{x}_n\|}$, тоді $\hat{\xi}_n$ - мінімальний розв'язок $Tx = \eta_n$
Тоді $A\hat{\xi}_n$ передкомпактна $\Rightarrow$ $\underline{\exists \xi_{n_k} \to \xi_0}$
$\exists n_k : A\hat{\xi}_{n_k} \to \xi_0$.
$1 = \|\hat{\xi}_n\| \ge n\|\eta_n\| \Rightarrow \|\eta_n\| \le \frac{1}{n} \to 0$
$A\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_n = \eta_n$, $\underbrace{A\hat{\xi}_{n_k}}_{\to \xi_0} - \hat{\xi}_{n_k} = \eta_{n_k} \to 0$ $\quad n_k \to \infty$
$\|$
$T\hat{\xi}_n = \eta_n$
$\Rightarrow \boxed{\hat{\xi}_{n_k} \to \xi_0} \Rightarrow A\xi_0 - \xi_0 = 0$, $\xi_0 \in \operatorname{Ker} T$.
$\Rightarrow \hat{\xi}_{n_k} - \xi_0$ розв'язок $T\cancel{x_k} = \eta_{n_k}$, $\boxed{\|\hat{\xi}_{n_k} - \xi_0\| \ge 1}$

Розглянемо $R(T)$, $\exists\, y_n \to y_0 \in E$

$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}$ $\forall n = 1, 2 \dots$

x_0 - мінімальний розв'язок $Tx = y_1$,

x_1 - мін. розв'язок р-ня $Tx = y_2 - y_1$

x_2 —"— $Tx = y_3 - y_2$

x_n —"— $Tx = y_{n+1} - y_n$

Оскільки x_n - мінімальний, то $\|x_n\| \leq C\|y_{n+1} - y_n\|$
$= \frac{C}{2^n}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k = \hat{x}$ збігається.

Тоді: $T\hat{x} = T \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k \right) = \lim \left(\sum\limits_{k=0}^{n} Tx_k \right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = y_0 \Rightarrow \hat{x}$ - розв'язок $Tx = y_0 \Rightarrow$

$y_0 \in R(T)$ ▮

$y \in R(T)$

<u>Т.</u> Рівняння $Tx = y$ має розв'язок $\Leftrightarrow$

$l(y) = 0 \quad \forall l \in \operatorname{Ker} T^*$.

<u>Д.</u> <u>Необх.</u> нехай $y \in R(T) = l(y) = l(Tx) =$

$= (T^* l)(x) = 0$, якщо $l \in \operatorname{Ker} T^*$

<u>Дост.</u> y такий, що $l(y) = 0 \quad \forall l \in \operatorname{Ker} T^*$

Припустимо $y \notin R(T)$ - підпростір,

$\exists\, l_0$, $\|l\| = 1$, $l_0|_{R(T)} = 0$ $l_0(y) \neq 0$.

$(T^* l_0)(x) = l_0(Tx) = 0 \Rightarrow l_0 \in \operatorname{Ker} T^*$ $l_0(y) \neq 0$. ▮

<u>Насл.</u> $Tx = y$ має розв'язок $\forall y \in E$ $(R(T) = E)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T^* = \{0\}$.

$\underline{\underline{T}}$ E банахів. Рівняння $T^* l = m \in E'$ має розв'язок $\Leftrightarrow$ $m(x) = 0$ $\forall x \in \operatorname{Ker} T$.

$\underline{\underline{Д}}$ $\underline{Необх.}$ $m \in E'$, $m \in R(T^*)$, $x \in \operatorname{Ker} T$

$\Rightarrow m(x) = (T^* l)(x) = l(Tx) = 0$.

$\underline{Дост.}$ $m \in E'$: $m(x) = 0$ $\forall x \in \operatorname{Ker} T$.

Побудуємо розв'язок $\underline{\underline{T^* l = m}}$,

$(T^* l)(x) = l(Tx) = m(x)$

Досить задати l_0 на $R(T)$.

Задамо $\underline{l_0(y) = m(x)}$, x – довільний прообраз y,

~~Ty = x~~ $Tx = y$.

$Tx_1 = y$, $Tx_2 = y$ $\quad m(x_1 - x_2) = 0$, бо $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} T$

отже l_0 коректно визначений.

$|l_0(y)| = |m(\hat{x})| \le \|m\| \|\hat{x}\| \le \|m\| c \|y\|$. $\boxed{\Xi}$

Наслід. $R(T^*) = E' \Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = 0$.

$\underline{\underline{T.}}$ $R(T) = E \Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = 0$. Тоді $\exists T^{-1}$, і $\exists !$ розв'язок $Tx = y$

Д. $\underline{Необхідність}$ Нехай $R(T) = E$. Припустимо $\operatorname{Ker} T \neq 0$. $G_1 = \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$, $G_1 \subset E$.

$G_2 = \operatorname{Ker} T^2$, ... $G_n = \operatorname{Ker} T^n$, ... $\quad G_1 \subset G_2 \subset G_3 \dots \subset G_n \dots$

$T^n x = 0 \Rightarrow T^{n+1} x = 0$.

$x_1 \neq 0$ $\quad Tx_1 = 0$, $\exists x_2 : Tx_2 = x_1$, ... $\exists x_n : Tx_n = x_{n-1}$, ...

$\forall n$ x_n $\quad T^n x_n = T^{n-1} x_{n-1} \dots = T x_1 = 0$, $T^{n-1} x_n = x_1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n$ $\exists x_n$: $x_n \in G_n$, $x_n \notin G_{n-1}$.

За т. про майже орт. е-р $\forall n$ $\exists y_n \in G_n$, $\|y_n\| = 1$ що $\|y_n - x\| \ge \frac{1}{2}$ $\forall x \in G_{n-1}$. $\quad T = A - I$, $A \in K(E)$

$\exists$ Ay_{n_l} - збіжна. ~~Звідси~~

$G_k \ni y_k$, $\|y_k\| = 1$, $\|y_k - x\| > \frac{1}{2}$ $\forall x \in G_{k-1} \subset G_k$

$n > m$ $\quad Ay_n - Ay_m = \underbrace{Ay_n - y_n}_{Ty_n} + y_n - \underbrace{Ay_m + y_m}_{Ty_m} - y_m =$

$= y_n - \boxed{y_m + Ty_n - Ty_m}$ $\qquad y_m \in G_m$, $m < n$

$\in G_{n-1}$ $\Rightarrow y_m \in G_{n-1}$

$Ty_n \in G_{n-1}$, $\quad T: G_n \to G_{n-1}$

бо якщо $x \in G_n \Leftrightarrow T^n x = 0 \Rightarrow T^{n-1}(Tx) = 0$

$\Rightarrow Tx \in G_{n-1}$

$\Rightarrow \|Ay_n - Ay_m\| = \|y_n - (y_m - Ty_n + Ty_m)\| > \frac{1}{2}$.

<u>Достатність</u> Нехай $\ker T = 0 \Leftrightarrow R(T^*) = E$

$\Rightarrow$ за необхідністю $\Rightarrow \ker T^* = 0 \Leftrightarrow R(T) = E$.

Оскільки E - банахів, $\ker T = 0$, $R(T) = E \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists T^{-1} \in L(E)$. ∎

<u>Т.</u> $\dim \ker T = \dim \ker T^*$, $\quad T = A - I$, $A \in K(E)$.

<u>Д.</u> $\ker T = 0 \Leftrightarrow \ker T^* = 0$

Нехай $\ker T$ або $\ker T^*$ не дорівнює $\{0\}$.

$x_1, \dots, x_n$ - базис $\ker T$, $l_1, \dots, l_p$ - базис в $\ker T^*$.

За наслідком з т. Гана-Банаха $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \subset E'$

$\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$, $\|\varphi_j\| = 1$,

$\exists z_1, \dots, z_p \in E$ $\quad l_j(z_k) = \delta_{jk}$.

Нехай $n < p$. Покладемо $\quad Bx = Ax + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) z_k$.

Покажемо, ~~$\ker B = 0$. Нехай~~ $\ker(B - I) = 0$

Нехай $\exists x_0 : Bx_0 = x_0 \Rightarrow Bx_0 - x_0 = 0$

$0 = l_k(Bx_0 - x_0) = l_k(\underbrace{Ax_0 - x_0}_{Tx_0} + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_0) z_j) =$

$= l_k(Tx_0) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_0) l_k(z_j) = \underbrace{(T^* l_k)}_{0}(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_0)\delta_{jk} = \varphi_k(x_0)$

$\Rightarrow Bx_0 = Ax_0 = x_0 \Rightarrow x_0 \in \ker(A - I)$.

$x_0 \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow x_0 = \sum_j \xi_j x_j$, причому,

оскільки $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - біортогон. до $x_1, \dots, x_n$,

то $\varphi_k(x) = \sum_j \xi_j \underbrace{\varphi_k(x_j)}_{\delta_{jk}} = \xi_j \Rightarrow \varphi_k(x_0) = \xi_k$

$\Rightarrow$ оскільки $\varphi_k(x_0) = 0 \Rightarrow \xi_k = 0 \;\; \forall k \Rightarrow x_0 = 0$,

де x_0 - розв'язок $Bx_0 = x_0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(B - I) = 0$

$\Rightarrow R(B - I) = E \Rightarrow z_{n+1} \in R(B - I) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x' : \underline{Bx' - x'} = z_{n+1}$

$1 = \boxed{l_{n+1}(z_{n+1})} = l_{n+1}\left(Tx' + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x') z_j\right)$

$= \underset{(T^* l_{n+1})(x') = 0}{l_{n+1}(Tx')} + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x') \underbrace{l_{n+1}(z_j)}_{=0} = 0. \Rightarrow n \geq p.$

Зворотна рівність аналогічно, $B^* l = A^* l + \sum_{j=1}^{p} l(z_j) \varphi_j$

$\Rightarrow n = p$ $\boxed{\Xi}$