# Компактні оператори.

**Озн.** $E_1, E_2$ - л.н.п. $A: E_1 \to E_2$ компактний, якщо $\forall$ обмеженої $G \subset E_1$ $AG$ - передкомпакт.

$K(E_1, E_2)$ - м-на всіх компактних о-рів.

**Заув.** Оскільки комп. м-на обмежена $\Rightarrow K(E_1, E_2) \subset L(E_1, E_2)$

**Заув.** $A$ комп $\Leftrightarrow$ $A B_1(0)$ - передкомпактна.

**Заув.** якщо $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E_1$ - обмежена, то $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ містить збіжну підпосл. в $E_2$.

**Заув.** $\dim E_1 < \infty$, то $K(E_1) \neq L(E_1)$

$I: E_1 \to E_1$.

**Пр.** $\dim E_2 = n < \infty$, $\Rightarrow K(E_1, E_2) = L(E_1, E_2)$

оскільки в $\mathbb{C}^n$ кожна обм. м-на передкомп.

**Пр.** Нехай $A: E_1 \to E_2$, $\dim R(A) < \infty \Rightarrow A \in K(E_1, E_2)$

$\cancel{L_2(R, d\mu)}$ $E = C([0,1])$,

$(Af)(t) = \int_{[0,1]} K(t,s) f(s)\, ds$, $K(t,s) = a(t) b(s)$, $a, b \in C([0,1])$.

$\Rightarrow R(A) = \text{л.о.}\{a\} \Rightarrow A$ - комп. о-р.

$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) b_j(s) \Rightarrow$

**Заув.** $K(E)$ - лінійний простір (Довести)

**Т.** $E$ - банахів пр-р. $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ $\|A_j - A\| \to 0$, $j \to \infty$

$\Rightarrow A$ компактний.

**Д.** Покажемо, що для обм. $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E$

з $\{Ax_j\}$ можна виділити збіжну підпосл.

Діагональний метод: $\{A_1 x_j\}$ містить збіжну

$\{A_1 x_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$. $A_2 \in K(E) \Rightarrow \exists \{x_{2j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$,

$\{A_2 x_{2j}\}$ збіжна, ... $\forall k\ \exists \{x_{kj}\}_{j=1}^{\infty}$

$\{A_\ell x_{kj}\}_{j=1}^{\infty}$ збіжна, $\ell = 1, \dots, k$.

Розглянемо $\{x_{jj}\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow \forall l \ \{A_l x_{jj}\}_{j=1}^{\infty}$ збіжна.
Розглянемо $A = \lim_{j\to\infty} A_j$. Покажемо, $\{Ax_{jj}\}_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна

$$\|Ax_{nn} - Ax_{mm}\| = \|Ax_{nn} - A_k x_{nn} + A_k x_{nn} - A_k x_{mm} + A_k x_{mm} - Ax_{mm}\| \le \|(A - A_k)x_{nn}\| + \|A_k(x_{nn} - x_{mm})\| + \|(A_k - A)x_{mm}\| \to 0,\ k, m, n \to \infty,$$

бо 1) $\|A - A_k\| \to 0$, 2) $A_k$ збіжна на $x_{nn}$ ■

<u>Наслідок</u> $K(E)$ - підпростір в $L(E)$

<u>Заув</u> $A \in K(E)$, $B \in L(E)$ $AB, BA \in K(E)$

тобто $K(E)$ - замкнений двосторонній ідеал в $L(E)$

<u>Насл.</u> $A \in K(E) \Rightarrow \nexists A^{-1}: AA^{-1} = I$ $(\dim E = \infty)$

<u>Теорема</u> $A \in K(E) \Rightarrow A^* \in K(E')$.

<u>Д</u> $(l_j)_{j=1}^{\infty} \subset E'$ - обмежена. Покажемо, що $(A^* l_j)_{j=1}^{\infty}$ містить збіжну підпосл.

$$\|A^* l_j\| = \sup_{\|y\| \le 1} |(A^* l_j) y| = \sup_{y \in S_1(0)} |l_j(Ay)|$$

$$= \sup_{z \in AS_1(0)} |l_j(z)| \le \sup_{z \in \overline{AS_1(0)}} |l_j(z)|$$

$\overline{AS_1(0)} = Q$ - компакт

$= \|l_j\|_{C(Q)}$.

Нехай $A^* l_{j_k}$ - збіжна $\Leftrightarrow \|A^* l_{j_k} - A^* l_{j_m}\| \to 0$

$\Leftrightarrow \|l_{j_k} - l_{j_m}\|_{C(Q)} \to 0$, $k, m \to 0$

Доведемо, що $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ - компакт в $C(Q)$.

$|l_j(z)| \le \|l_j\| \|z\| \le C\|z\| \le C \cdot C_1$.

$|l_j(z_1) - l_j(z_2)| = |l_j(z_1 - z_2)| \le \|l_j\| \|z_1 - z_2\| \le C\|z_1 - z_2\|$.

$\Rightarrow$ За т. Арцела $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ компакт $\Rightarrow A^* \in K(E')$ ■

T. $A \in S_2(H) \Rightarrow A \in K(H)$. $H$ сепарабельний.

D. Покажемо, що $A = \lim_{j\to\infty} A_j$, $A_j \in K(H)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n}, & \dots \\ \vdots \\ a_{j1}, & \dots & a_{jn}, & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A-A_j\|_2^2 = \sum_{l=j+1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{lk}|^2\right) \underset{j\to\infty}{\Rightarrow} 0, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{lk}|^2 < \infty$$

але $\|A-A_j\| \le \|A-A_j\|_2 \Rightarrow A_j \to A$ в $H$ $\blacksquare$

Насл. Якщо в $H$ $A = \lim_{j\to\infty} A_j$, $\dim R(A_j) < \infty \Rightarrow A \in K(H)$

T. У сепар. гільб. пр-рі $H$, $\forall A \in K(H)$

$\exists A_j \to A$, $\dim R(A_j) < \infty$.

D. Нехай $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – о.н.б. в $H$. $H_n = $ л.о.$\{e_1, \dots, e_n\}$

$P_n$ – проектор на $H_n$. $P_n \xrightarrow{s} I$, тобто

$\forall x \in H$ $P_n x \to x$. $Q_n = I - P_n$, $Q_n \xrightarrow{s} 0$

Доведемо, що ~~$Q_n A = A_n$~~ $A_n = P_n A$. ~~$A_n \in K$~~

$\dim R(A_n) \le n$. Потрібно $\|P_n A - A\| \to 0$,

$Q_n = I - P_n$ $A - P_n A = Q_n A$, Потрібно $\|Q_n A\| \to 0$.

Припустимо, що $\exists c$ $\|Q_n A\| \ge c$.

$\|Q_n A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Q_n A x\| \Rightarrow \forall n$ $\exists x_n$, $\|x_n\| = 1$

$\|Q_n A x_n\| \ge \frac{c}{2}$. $y_n = A x_n$.

$A \in K(H) \Rightarrow \exists y_{n_k} \to y$ ~~$\|Q_n y_{n_k}\| \ge \frac{c}{2}$~~

$\|Q_n y\| \ge \frac{c}{2}$, але $Q_n \xrightarrow{s} 0 \Rightarrow Q_n y \to 0 \Rightarrow \|Q_n y\| \to 0$

$\blacksquare$

**Заув.** $S_2(H) \underset{\neq}{\subset} K(H)$.

$A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$,

якщо $a_n \to 0, n \to \infty$, то $A$ компактний,

бо $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $A_n = (a_1, \dots a_n, 0, \dots 0)$ (Вправа)

Т. $A \in L(H)$ компактний $\Leftrightarrow \exists n \geq 0,\ (A^*A)^n \in K(H)$.

Д. $n=1$ потрібно довести: $A^*A \in K(H) \Rightarrow A \in K(H)$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $\|x_j\| \leq C$, $j = 1, \dots, \dots$.

$$\|A(x_m - x_n)\|^2 = (A(x_m - x_n), A(x_m - x_n)) =$$

$$= (A^*A(x_m - x_n), x_m - x_n) \leq \|A^*A(x_m - x_n)\| \, \|x_m - x_n\| \leq$$

$$\leq 2C \|A^*A(x_n - x_m)\|$$

Якщо $A^*A \in K(H) \Rightarrow n_j$, $A^*A x_{n_j}$ збігається,

$\Rightarrow \|A^*A(x_{n_j} - x_{m_j})\| \to 0$, $n_j, m_j \to \infty$

$\Rightarrow A x_{n_j}$ фундаментальна $\Rightarrow \exists \lim A x_{n_j}$.

$n = 2^k$. Нехай $(A^*A)^2 \in K(H)$, тоді

$(A^*A)^* = A^*A \Rightarrow (A^*A)^2 = (A^*A)^* A^*A \Rightarrow A^*A \in K(H)$

$(A^*A)^{2^k} \in K(H) = A \in K(H)$.

$\forall n$ виберемо $k$, що $2^k \geq n$,

~~тоді $(A^*A)^n = (A^*A)^{2^k} (A^*A)^{n-2^k}$~~

Тоді $(A^*A)^{2^k} = \underbrace{(A^*A)^n}_{\in K(H)} \underbrace{(A^*A)^{2^k - n}}_{\in L(H)} \Rightarrow (A^*A)^{2^k} \in K(H) \Rightarrow$

$\Rightarrow A \in K(H)$ ∎.