Спектр оператора.

E - нормований пр-р. Що таке спектр $A \in L(E)$?

$E = \mathbb{C}^n$, A - м-ця $n \times n$

$\mathbb{C}^n \ni x$ - власний вектор A з власним значенням λ, якщо $Ax = \lambda x$. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

λ_j - корені хар. полінома $\det(A - \lambda I) = 0$

$(A - \lambda I)x = 0$. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists$ нетр. розв'язок.

$\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1}$.

$\dim E = \infty$. x - власний в-р A, якщо $\exists \lambda \in \mathbb{C}: Ax = \lambda x$.

тоді: λ - власне число.

Визначити $\sigma(A)$ - м-ну всіх вл. зн. погано.

Пр. $H = L_2([0,1], dx)$ $(Af)(t) = t f(t)$.

У A немає власних значень.

λ - в.з. A $\Leftrightarrow \exists x: Ax = \lambda x$, $(Ax)(t) = t x(t)$

$((A - \lambda I)x)(t) = (t - \lambda) x(t) = 0$.

$t - \lambda \neq 0$ майже скрізь $\Rightarrow x(t) = 0$ майже скрізь.

Озн. λ - регулярна точка $A \Leftrightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1}$

$\lambda \in \rho(A)$. Спектр A, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Пр $H = L_2([0,1], dx)$, $(Ax)(t) = t x(t)$.

$\lambda \notin [0,1] \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$

$\|(A - \lambda I)(x)\|^2 = \int_{[0,1]} |t - \lambda|^2 |x(t)|^2 dt \geq d^2 \int_{[0,1]} |x(t)|^2 dt = d^2 \|x\|^2$.

$x \in L_2$ $((A - \lambda I)x)(t) = (t - \lambda) x(t) \in L_2 \Leftrightarrow x \in L_2$

$\Rightarrow R(A - \lambda I) = L_2([0,1], dx) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

$\lambda \in [0,1] \Rightarrow R(A - \lambda I) \neq H$, $R(A - \lambda I) \not\ni 1(t)$

якщо $1(t) \in R(A - \lambda I) \Rightarrow 1(t) = (t - \lambda)(A - \lambda I)^{-1} 1(t)$

$(A - \lambda I)^{-1} 1(t) = \frac{1}{t - \lambda} \notin L_2 \Rightarrow \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \sigma(A) = [0,1]$.

Т. $A \in L(E)$. $\sigma(A) \subseteq B_{\|A\|}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \|A\|\}$.

$\sigma(A)$ замкнена м-на. $B_{\|A\|}(0)$

Д. Нехай $|z| > \|A\|$. $A - zI = -\frac{1}{z}(I - \frac{1}{z}A) \Rightarrow \|\frac{1}{z}A\| < 1$

$\Rightarrow \exists (I - \frac{1}{z}A)^{-1} \Rightarrow \exists (A - zI)^{-1}$.

Нехай z_0 - регулярна точка, $z_0 \in \rho(A)$

$\exists A^{-1}$, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists (A+B)^{-1}$
$A + B = A^{-1}(I + A^{-1}B)$ $(A+B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A$

$\Gamma \ni z$ $A - zI = A - z_0I - (z - z_0)I$.

$(A - zI)^{-1}$ існує, якщо $|z - z_0| < \|(A - z_0I)^{-1}\|^{-1}$

$\Rightarrow z \in \rho(A)$. $\blacksquare$

Зауб. $|z - z_0| \le r < \|(A - z_0I)^{-1}\|^{-1} \Rightarrow$

Норми $\|(A - zI)^{-1}\|$ рівномірно обмежені

$A - zI = A - z_0I - (z - z_0)I = (A - z_0I)(I - (z - z_0)(A - z_0I)^{-1})$

$(A - zI)^{-1} = (I - (z - z_0)(A - z_0I)^{-1})^{-1}(A - z_0I)^{-1}$

$\|(A - zI)^{-1}\| \le \|(A - z_0I)^{-1}\| \, \|(I - (z - z_0)(A - z_0I)^{-1})^{-1}\|$

$(1 - \underbrace{(z - z_0)(A - z_0I)^{-1}}_{T})^{-1} = I + T + T^2 + \cdots$,

$\|T\| = |z - z_0| \, \|(A - z_0I)^{-1}\| \le r \ldots = q < 1$

$\|(I - T)^{-1}\| \le 1 + \|T\| + \cdots \quad \frac{1}{1 - \|T\|}$

$\|(I - (z - z_0)(A - z_0I)^{-1})^{-1}\| \le \frac{1}{1 - |z - z_0| \, \|(A - z_0I)^{-1}\|}$

$\|(A - zI)^{-1}\| \le \frac{\|(A - z_0I)^{-1}\|}{1 - |z - z_0| \, \|(A - z_0I)^{-1}\|} \le \frac{\|(A - z_0I)^{-1}\|}{1 - r\|(A - z_0I)^{-1}\|} > 0$

Озн. $(A - zI)^{-1} = R_z(A)$ - резольвента A.

резольвента - аналог ф-ї $\frac{1}{a - z}$.

Тотожність Гільберта. $z_1, z_2 \in \rho(A) \Rightarrow$

$$R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A) = (z_1 - z_2) R_{z_1}(A) R_{z_2}(A).$$

$$\boxed{\frac{1}{a - z_1} - \frac{1}{a - z_2} = \frac{(a - z_2) - (a - z_1)}{(a - z_1)(a - z_2)} = \frac{z_1 - z_2}{(a - z_1)(a - z_2)}.}$$

$\underline{\underline{D}}$ $(A - z_2 I) - (A - z_1 I) = (z_1 - z_2) I$

$$R_{z_1}(A - z_2 I) - \underbrace{R_{z_1}(A - z_1 I)}_{I} = (z_1 - z_2) R_{z_1}$$

домножимо на $R_{z_2}(A)$ справа $\Rightarrow$ ☒

Наслідок. $\forall z_1, z_2 \in \rho(A)$ $\quad R_{z_1}(A) R_{z_2}(A) = R_{z_2}(A) R_{z_1}(A)$

T. $\mathbb{C} \supset \rho(A) \ni z \longmapsto R_z(A) \in L(E)$ - неперервне за z.

$\underline{\underline{D}}$ $\forall z_1, z_2 \in \rho(A)$ $\quad \|R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A)\| = |z_1 - z_2| \, \|R_{z_1}(A)\| \|R_{z_2}(A)\|$

Якщо z лежить в околі z_0,

$\|R_z(A) - R_{z_0}(A)\| = |z - z_0| \, C. \to 0, \; z \to z_0.$ ☒

$\underline{\underline{T.}}$ $\forall z \in \rho(A) \; \exists \; R_z'(A) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{R_{z+h} - R_z}{h}.$

$\underline{\underline{D.}}$ $\frac{R_{z+h} - R_z}{h} = R_{z+h} R_z \to (R_z(A))^2 = R_z'(A).$

$\Rightarrow$ $R_z(A)$ - аналітична ф-я в $\rho(A)$.

Заув. $x \in E$, $\ell \in E'$, тоді $\ell(R_z(A)x) = f_{x\ell}(z)$ - аналітична в $\rho(A)$.

$$\frac{1}{h}\left(f_{x,\ell}(z+h) - f_{x,\ell}(z)\right) = \frac{1}{h} \ell\left((R_{z+h}(A) - R_z(A))x\right)$$

$$= \ell\left(\frac{1}{h}(R_{z+h}(A) - R_z(A))x\right) \to f_{x,\ell}'(z).$$ ☒

Т. $A \in L(E)$, то $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Д. Припустимо супротивне, $\sigma(A) = \emptyset \Rightarrow R_z(A)$ - ціла.

Покажемо, що $\|R_z(A)\| \le C$, $z \in \mathbb{C}$.

Розглянемо $\overline{R_{2\|A\|}(0)} \subset \mathbb{C} \Rightarrow \exists C_1$, при $|z| \le 2\|A\|$

$\|R_z(A)\| \le C_1.$

Якщо $|z| > 2\|A\|$, $\|R_z(A)\| = \|(A - zI)^{-1}\|$

$$= \frac{1}{|z|} \|(I - \frac{1}{z} A)^{-1}\| \le \frac{1}{|z|} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{|z|}\|A\|}_{\le \frac{1}{2}}} \le \frac{1}{2\|A\|} \cdot 2 = \frac{1}{\|A\|} = C$$

$\forall x \in E$, $\forall l \in E'$ $f_{x,l}(z) = l(R_z(A)x)$, тоді:

$$|f_{x,l}(z)| = |l(R_z(A)x)| \le \|l\| \, \|R_z(A)\| \, \|x\| \le C.$$

$\Rightarrow$ ~~$f(x,l$~~ $f_{x,l}(z) = C_{x,l}$. Зауважимо, $\|R_z(A)\| \le \frac{2}{|z|} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow f_{x,l}(z) \equiv 0$ $\forall x \in E, l \in E' \Rightarrow R_z(A) = 0$, що неможливо,

бо $\exists (R_z(A))^{-1} = (A - zI)$, отже $\ker R_z(A) = 0$. $\blacksquare$