H - гільбертів над $\mathbb{C}$. $\quad H \simeq H'$

$A \leftrightarrow b_A(\cdot,\cdot) = (A\cdot, \cdot)$.

$A = A^*$. $\quad A \geq 0 \quad (Ax, x) \geq c\|x\|^2$ - напівобмежен

$\Leftrightarrow (Ax, x) \geq 0 \quad (A - cI) \geq 0$

$c > 0, \quad A - cI \geq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}. \Rightarrow \|Ax\| \geq c\|x\|, x \in H$

$\overline{R(A)} = H$.

$A \in L(H)$. $\quad \boxed{(R(A))^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*}$

$(Ax, y), \quad y \in (R(A))^{\perp} \quad (Ax, y) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (x, A^*y) \Rightarrow A^*y = 0$

$A = A^* \quad \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} A = (R(A))^{\perp}$

$\|Ax\| \geq c\|x\| \Rightarrow \operatorname{Ker} A = 0 \Rightarrow (R(A))^{\perp} = 0 \Rightarrow \overline{R(A)} = H$.

Заув $A \in L(H)$, $\Rightarrow A^*A \geq 0$, оскільки $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$

$z \mapsto \bar{z}z = |z|^2$.

$P = P^* = P^2$ - проектори $\quad P \to G \subset H$.

A - ізометричний, $\quad \|Ax\| = \|x\| \Rightarrow (Ax, Ay) = (x, y)$

(e_j) - о.н.с. $\Rightarrow (Ae_j)$ - о.н.с. $\quad (A^*Ax, y) = (x, y)$

$A^*A = I$.

AA^* - проектор, на $R(A)$.

$AA^*AA^* = AA^* = P$. $\quad R(P) \subset R(A) \quad Px = A(A^*x)$

$\Rightarrow A^*P = A^*AA^* = A^* \Rightarrow \cancel{R(P) \supset R}$

P на $(\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$ є тотожним $\Rightarrow P$ на $\operatorname{Ker} A^* \equiv 0$.

A унітарний, якщо $R(A) = H$, A ізометрія.

$\Rightarrow AA^* = A^*A = I \Rightarrow A^* = A^{-1}$.

H - сепарабельний $\Rightarrow \exists (e_j)_{j=1}^{\infty}$

$\forall x = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{=(x,e_k)}{x_k} e_k, \quad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (Ae_k)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{j=1}^{\infty} (Ae_k, e_j) e_j = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk} x_k e_j, \quad a_{jk} = (Ae_k, e_j).$

$L(H) \ni A \Leftrightarrow (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}.$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$ - не задає обмежений оператор

$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \qquad (Ax)_j = (Ax, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k$

Частинний випадок:

Т. Нехай $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$: $\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty} \mapsto A \in L(H).$

Д. $\forall x \in H \quad \|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Ax, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} x_k \right|^2$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|A\| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2.$

Пр. $I \to (\delta_{jk})_{j,k=1}^{\infty}.$

1) $A^* = A, \quad a_{jk} = (Ae_k, e_j), \quad j,k = 1,2,\ldots.$

$A^* \to (a^*_{jk}), \quad a^*_{jk} = (A^* e_k, e_j) = (e_k, Ae_j) = \overline{(Ae_j, e_k)}$

$a^*_{jk} = \boxed{\overline{a_{kj}} = a_{jk}}$ ермітова матриця.

2) невід'ємні о-ри $\Leftrightarrow (Ax, x) \geq 0 \quad \forall x$

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j. \quad (Ax, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_k e_j, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) =$

$= \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_k \overline{x_j} \geq 0}$

Критерій Сільвестра $(a_{jk})_{j,k=1}^{n} \geq 0 \Leftrightarrow \det (a_{jk})_{j,k=1}^{l \leq n} \geq 0$

Ортопроектори. A, B $A \to (a_{jk})$, $B \to (b_{jk})$

$$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{jl} b_{lk}$$

$P = P^* = P^2$, $\boxed{p_{jk} = \overline{p_{kj}} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jl} p_{lk}}$

$P \leftrightarrow G \subset H$, ~~$(e_j)$~~ G - скінченновимірний

$e_1, \dots, e_n$ - о.н.б. в G

$(e_j)_{j=1}^{\infty}$, $e_j \subset G$, $j \le n$.

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ізометрії. $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ - о.н.б. A - ізометрія $\Rightarrow (Ae_j, Ae_k) = (e_j, e_k) = \delta_{jk}$

$\Rightarrow (Ae_j)_{j=1}^{\infty}$ - о.н.с. (A унітарний, то о.н.б.)

Зафіксуємо j $Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{a_{kj}}{\underbrace{(Ae_j, e_k)}} e_k \Rightarrow$

$Ae_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots a_{kj}, \dots)$ - j-й стовпець м-ці (a_{jk})

(a_{jk}) - м-ця ізометричного (унітарного) о-ра $\Leftrightarrow$

її стовпчики утворюють о.н.с. (о.н.б.).

Якобієві матриці: $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ - якобієва,

якщо $a_{jk} = 0$, $|j-k| > 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ & c_2 & a_3 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Т. $(a_{jk})_{j=1}^{\infty} \to A \in L(H) \Leftrightarrow$

$\exists c : |a_{jk}| \le c$.

$x = (x_1, x_2, \dots)$

$Ax = \lambda x$

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= \lambda x_1 \\ c_1 x_1 + a_2 x_2 + b_2 x_3 &= \lambda x_2 \\ c_2 x_2 + a_3 x_3 + b_3 x_4 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

Оператори Гільберта-Шмідта.

H - сепарабельний над $\mathbb{C}$, $(e_j)_{j=1}^{\infty}$, $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ - о.н.б.

Нехай $A \in L(H)$ $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 < \infty$.

(Af_k, e_j) - j-та компонента Af_k

$\|Af_k\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2 < \infty$

$(Af_k, e_j) = (f_k, A^* e_j)$ $\quad \sum_{j=1}^{\infty} \|A^* e_j\|^2 < \infty$.

__Озн.__ A наз. оператором Гільберта-Шмідта, якщо в деякому (довільному) о.н.б $(e_j)_{j=1}^{\infty}$

$\|A\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$, $\quad a_{jk} = (Ae_k, e_j)$.

__Вправа__ $\|\cdot\|_2$ - норма на м-ні о-рів Г.-Ш.

~~$\|A\|_2$~~ $\|A\| \le \|A\|_2$

S_2 - м-на усіх о-рів Г.-Ш.

__Пр.__ $A \to (a_{jk}) = diag(a_1, a_2, \dots a_n, \dots)$.

$A \in S_2 \Leftrightarrow \sum |a_j|^2 < \infty$

__Тв.__ $A \in S_2 \Leftrightarrow A^* \in S_2$ $\quad a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$

__Тв.__ $\forall A \in S$, $\forall C \in L(H)$ $\quad CA, AC \in S_2$,

$\|CA\|_2 \le \|C\| \|A\|_2$

$\|CA\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|CAe_j\|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} \|C\|^2 \|Ae_j\|^2 = \|C\|^2 \|A\|_2^2$

S_2 є двостороннім ідеалом в алгебрі $L(H)$

M - алгебра, $S \subset M$ - підалгебра. S - ідеал, (пр. лів. двос.)

якщо $\forall m \in M$, $\forall s \in S$ $\quad ms; sm \in S$

$S_2 \ni A \Leftrightarrow (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, $\|A\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$

$\Rightarrow S_2 \subset L(H)$, S_2 – гільбертів простір

відносно ск. добутку $(A,B) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}\overline{b_{jk}}$.

базис $(E_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$

$(E_{jk})_{l,m} = \delta_{jl}\delta_{km}$.

Тв. $(A,B) = Tr(B^*A)$, $Tr\, A = \sum_{j=1}^{\infty}(Ae_j, e_j)$

1) Tr визначений не для всіх $A \in L(H)$

Заув. М-на усіх $A \in L(H)$, $|Tr\, A| < \infty$
називається м-на ядерних о-рів, S_1

Інтегральні оператори.

$H = L_2(R, d\mu)$, $\ni f \mapsto (Af)(t) = \int_R K(t,s) f(s)\, d\mu(s)$,

де K - деяка вимірна ф-я на $R\times R$.

K - ядро о-ра A.

Пр $R = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mu(\{j\}) = 1$ $L_2(R, d\mu) = l_2$

$K(t,s) = K(j,k) = a_{jk}$ $\int K(t,s) f(s)\, d\mu = \sum a_{jk} f_k e_j$.

Тв. Нехай $K \in L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu)$

Тоді $(Af)(t) = \int_R K(t,s) f(s)\, d\mu(s)$ обмежений,

$\|A\|^2 \le \iint_{R\times R} |K(t,s)|^2 d\mu(t)\, d\mu(s)$.

$$\|Af\|^2 = \int_R |(Af)(t)|^2 \, d\mu(t) = \int_R \Big|\int_R K(t,s) f(s)\, d\mu(s)\Big|^2 d\mu(t)$$

$$\le \boxed{\int_R \int_R |K(t,s)|^2 d\mu(t)\, d\mu(s)}\, \|f\|^2 = \|K\|\, \|f\|$$

T. Якщо $K \in L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu)$, то відповідний $A_K \in S_2$, $\|A_K\|_2^2 = \|K\|^2_{L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu)}$

Л. Нехай в просторі $L_2(R, d\mu)$ задано базиси $(e_j(\cdot))_{j=1}^{\infty}$ $(f_j(\cdot))_{j=1}^{\infty}$. Тоді: $e_j(t) f_k(s)$ - ортонормований базис в $L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu)$

Д. $\int\limits_{R\times R} e_j(t) f_k(s) \overline{e_l(t)}\, \overline{f_m(s)}\, d\mu(t) d\mu(s) = \delta_{jl}\delta_{km}$.

Д. Т-ми. $(e_j(\cdot))$ - о.н.б. в $L_2(R, d\mu)$

$$a_{jk} = (Ae_k, e_j) = \int\limits_R \Big(\int\limits_R K(t,s) e_k(s) d\mu(s)\Big) \overline{e_j(t)}\, d\mu(t)$$

$$= \iint K(t,s) \overline{e_j(t)\overline{e_k(s)}}\, d\mu(t) d\mu(s)$$

$K \in L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu) \Rightarrow$ за р. Парсеваля

$$\|K\|^2_{L_2(R\times R, d\mu\otimes d\mu)} = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$$

$\Rightarrow \sum |a_{jk}|^2 < \infty$. ∎