H - Гільбертів $\mathbb{C}$.

Т. Ріса: $H' \leftrightarrow H$ $\quad l(x) = (x, l)$, $x, l \in H$.

$(x, \lambda l) = (\bar{\lambda} l)(x)$.

Оператори в H. $\quad A \mapsto A^*$, $\quad A: H \to H$, $A^*: H' \to H'$

Спряжений о-р д.є в H. $\quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

$(A+B)^* = A^* + B^*$, $\quad (AB)^* = B^* A^*$, $\quad \|A^*\| = \|A\|$.

$*: L(H) \to L(H)$. $\quad (Ax, y) = (x, A^* y)$.

Тв. $A \in L(H)$. Тоді: $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

Д. $\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, Ax) =$

$= \sup\limits_{\|x\|=1} |(A^* A x, x)| \le \sup\limits_{\|x\|=1} \|A^* A x\| = \|A^* A\|$.

Висновок $L(H) \in C^*$-алгебра, тобто:

1. лінійний простір
2. алгебра, $(x, y) \to x \cdot y$.
3. Нормована $\|\cdot\|$, $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$, повний
4. $*: x \to x^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}(x)^*$, $x^* x^* = x$.
5. $\|a^* a\| = \|a\|^2$

Білінійні форми.

$H \times H \ni (x, y) \mapsto b(x, y) \in \mathbb{C}$ - білінійна форма,

1. $b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z)$ - лінійність
2. $b(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda} b(x, y) + \bar{\mu} b(x, z)$.

Пр. 1. $b(x, y) = (x, y)_H$

2. $A \in L(H)$, то $b_A(x, y) = (Ax, y) = (x, A^* y)$.

Тв. $4 b(x, y) = b[x+y] - b[x-y] + i b[x+iy] - i b[x-iy]$,

де $b[x] \overset{def}{=} b(x, x)$.

$b(\cdot,\cdot)$ обмежена, якщо $\exists C\ \forall x,y$ $|b(x,y)| \le C\|x\|\|y\|$.

$|b_A(x,y)| = |(Ax,y)| \le \|Ax\|\|y\| \le \|A\|\|x\|\|y\|$

<u>Т.</u> $\forall$ обмеженої b $\exists A \in L(H)$, $b(x,y) = b_A(x,y) = (Ax,y)$.

<u>Д.</u> $l(y) = \overline{b(x,y)} \in H' \Rightarrow \exists a_x \in H: l(y) = (y, a_x)$

$\Rightarrow \overline{b(x,y)} = (y, a_x) \Rightarrow b(x,y) = (a_x, y)$.

$H \ni x \mapsto a_x = Ax$.

$(A(\alpha x+\beta y), z) = (a_{\alpha x+\beta y}, z) = b(\alpha x+\beta y, z) =$

$= \alpha b(x,z) + \beta b(y,z) = \alpha(Ax,z) + \beta(Ay,z)$ ~~αA~~

$|(Ax,y)| \le C\|x\|\|y\| \Rightarrow \|Ax\| \le C\|x\|$. ∎

$\|b(\cdot,\cdot)\| = \inf\{C \mid |b(x,y)| \le C\|x\|\|y\|\}$.

1) Самоспряжені о-ри. A - самоспряжений $\Leftrightarrow$

$A = A^* \Leftrightarrow \forall x,y \in H \quad (Ax,y) = (x,Ay)$.

$(e_j)_{j=1}^{\infty}$ - о.н.б. $\quad A \mapsto (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, $\quad a_{jk} = (Ae_k, e_j)$

$A^* \mapsto \left((A^*e_k, e_j)\right)_{j,k=1}^{\infty} = \overline{(e_j, A^*e_k)} = \overline{(Ae_j, e_k)} = \left(\overline{a}_{kj}\right)_{j,k=1}^{\infty}$

$A = A^* \quad \overline{a_{jk}} = a_{kj}, \quad j,k = 1,2,\dots$.

Т. $\forall A \in L(H)$ $\exists$ самоспряжені $\operatorname{Re}A, \operatorname{Im}A \in L(H)$,

що $A = \operatorname{Re}A + i\operatorname{Im}A$.

<u>Д.</u> $\operatorname{Re}A = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $\quad \operatorname{Im}A = \frac{1}{2i}(A-A^*)$

$(\operatorname{Re}A)^* = \frac{1}{2}(A+A^*)^* = \frac{1}{2}(A^*+A^{**}) = \frac{1}{2}(A+A^*)$. ∎

<u>Т.</u> Наступні умови рівносильні:

1) $A = A^*$ 2) b_A - ермітова, тобто $b_A(x,y) = \overline{b_A(y,x)}$

3) $b_A[\cdot] \in \mathbb{R}$, тобто $\forall x$ $b_A(x,x) \in \mathbb{R}$.

1)$\Leftrightarrow$2) $b_A(x,y) = (Ax,y) = \overline{(y,Ax)} = \overline{(Ay,x)} = \overline{b_A(y,x)}$.

2)$\Leftrightarrow$3) $b_A(x,x) = \overline{b_A(x,x)} \in \mathbb{R}$.

$4b_A(x,y) = b_A[x+y] - b_A[x-y] + ib_A[x+iy] - ib_A(x-iy)$

$4b_A(y,x) = b_A[x+y] - b_A[x-y] + ib_A(y+ix, y+ix) - ib_A(y-ix, y-ix)$

$ib_A(x-iy, x-iy)$

$b_A(x,y) = \overline{b_A(y,x)}$ ∎

Зауж. $\|A^*A\| = \|A\|^2 \Rightarrow \|A^2\| = \|A\|^2$, якщо $A = A^*$,

більш того, $\|A^n\| = \|A\|^n$. $n = 1, 2, \dots$

Для несамосоп. о-ра $\|A^2\| = \|A \cdot A\| \le \|A\|^2$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = (0, 1)$, $\|e_2\| = 1$, $\|Ae_2\| = \|e_1\| = 1$

$\Rightarrow \|A\| = 1$, але $A^2 = 0$, $\|A^2\| = 0$.

Невід'ємні о-ри. $A \ge 0$, якщо $\forall x \in H$ $(Ax, x) \ge 0$.

$A \ge B$, якщо $A - B \ge 0$.

$A \ge 0 \Rightarrow A = A^*$.

A - наміобмежений знизу, якщо $\forall x \in H$ $(Ax, x) \ge c\|x\|^2$
(константою c)

$(Ax, x) \ge c(x, x) \Leftrightarrow ((A - cI)x, x) \ge 0 \Leftrightarrow A - cI \ge 0$.

$\forall A = A^*$ $|(Ax, x)| \le \|Ax\| \|x\| \le \|A\| \|x\|^2$

$-\|A\| \|x\|^2 \le (Ax, x) \le \|A\| \|x\|^2$

Тл. $A \ge cI$, $c > 0$. $\Rightarrow \exists A^{-1}$.

$c\|x\|^2 \le (Ax, x) \le \|Ax\| \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \ge c\|x\|$.

Проектори (ортопроектори). $H \supset G$, $G^\perp$

$H \ni x = x_1 + x_2$, $x_1 \in G$, $x_2 \in G^\perp$, $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

$P_G x = x_1 = \text{пр}_G x$ - проектор на G.

$G = \text{з.л.о.} \{e_i\}_{i=1}^{n \le \infty}$, $P_G x = \sum_{i=1}^{n \le \infty} (x, e_i) e_i$

Т. P-проектор на G, тоді:

1) $P \in L(H)$, $\|P\| = 1$, $G \ne 0$

2) $P^2 = P$

3) $P^* = P$, $P \ge 0$

Д. 1) $\|Px\|^2 = \|x\|^2 - \|x_2\|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \|P\| \le 1$, $x \in G$, то $Px = x$, $\|Px\| = \|x\|$

2). $Px = x$, $x \in G$

3) $(Px, x) = (x_1, x_1 + x_2) = (x_1, x_1) + (x_1, x_2) = (x_1, x_1) \ge 0$

Т. Нехай $P \in L(H)$, $P = P^2 = P^* \Rightarrow \exists\, G \subset H$, що $P = P_G$.

Д. $G = \{x \in H \mid Px = x\} = \{x \in H \mid (P-I)x = 0\} = \operatorname{Ker}(P-I)$

Покажемо, що $P = P_G$. $\forall x \in H$ $Px \in G$, оскільки $P(Px) = P^2x = Px$. Покажемо, що $Px = P_G x$

Оскільки Px, $P_G x \in G$, досить довести, що $\forall g \in G$ $(Px, g) = (P_G x, g) = (x, P_G g)$

$\overset{\shortparallel}{(x, Pg)}$, $\forall x \in H \Rightarrow Pg = P_G g$ ∎

Вправа P_1, P_2 – проектори, $P_1 + P_2$ – проектор $\Leftrightarrow P_1 P_2 = 0$.

Нормальні о-ри. A – нормальний $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$.

$A^* = A \Rightarrow A$ – нормальний.

Тв. A нормальний $\Leftrightarrow \operatorname{Re} A \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A \operatorname{Re} A$.

Ізометричні о-ри. E – нормований, $A \in L(E)$

A ізометричний, якщо $\|Ax\| = \|x\|$ $\forall x \in E$.

Тв. A ізометричний о-р в H, тоді $\forall x, y$ $(Ax, Ay) = (x, y)$. з комп. точності.

Заув. A ізометричний $\Leftrightarrow A^*A = I$

Д. A – ізом. $\Leftrightarrow \forall x, y$ $(Ax, Ay) = (x, y)$

$\overset{\shortparallel}{(A^*Ax, y)} \Rightarrow A^*Ax = x$.

A унітарний, якщо A ізометричний, $R(A) = H$

$(e_j)_{j=1}^{n \le \infty}$ – о.н.с. $\Rightarrow (Ae_j, Ae_k) = (e_j, e_k) = \delta_{jk} \Rightarrow$ ізом. о-р переводить онс в онс.

$\dim H = n < \infty \Leftrightarrow \exists \{e_j\}_{j=1}^{n}$ – о.н.б. A – ізометрія, то $\{Ae_j\}_{j=1}^{n}$ – о.н.б $\Rightarrow$ ~~А.о.~~ $R(A) = H$.

$\Rightarrow \dim H < \infty$ ізометричність $\Rightarrow$ унітарність.

Пр. $H = \ell_2 \ni x = (x_1, x_2, \dots)$, $\sum |x_i|^2 < \infty$

$Se_j = e_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$,

$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \Rightarrow Sx = \sum_{j=2}^{\infty} x_{j-1} e_j = (0, x_1, x_2 \dots)$

$\Rightarrow e_1 \perp Se_j$, $j = 1, \dots, \infty \Rightarrow e_1 \perp R(S)$.

Т. A унітарний, то $\exists A^{-1} = A^*$.

Д. $\|Ax\| = \|x\|$, $R(A) = H$ $\boxed{\exists c \|Ax\| \geq c\|x\|}$

$\forall x, y$ $(Ax, y) = (Ax, AA^{-1}y) = (x, A^{-1}y)$

$\| $

$(x, A^* y)$ $\Rightarrow A^* = A^{-1}$

$\Rightarrow AA^* = I$

$\Rightarrow$ Наслідок A унітарний $\Leftrightarrow A^*A = AA^* = I$.