E_1 - л.н.п., $\|\cdot\|_1$, E_2 - л.н.п., $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_{E_2}$

$A: E_1 \to E_2$, неперервність $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E_1$ $\|Ax\|_2 \le C\|x\|_1$.

$E_1 = E_2 = \mathbb{C}^n$, $Ax = y$ однозначно розв'язується $\Leftrightarrow$
$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, $\operatorname{Ker} A = 0$. $\Rightarrow \exists A^{-1}$ $x = A^{-1}y$

A^{-1} - обернений до A, якщо 1) $\operatorname{Ker} A = 0$, 2) $R(A) = E_2$,
3) $\|A^{-1}y\|_1 \le C\|y\|_2$.

Т. якщо $R(A) = E_2$, то $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists C, \forall x \in E_1$
$\|Ax\|_2 \ge C\|x\|_1$.

<u>Т. Банаха.</u> Нехай E_1, E_2 - банахові, нехай $A \in L(E_1, E_2)$
для якого 1) $\operatorname{Ker}(A) = 0$, 2) $R(A) = E_2$. $\Rightarrow \exists A^{-1} \in L(E_2, E_1)$.

<u>Д.</u> В E_2 введемо $E_2 \ni y \mapsto \|A^{-1}y\|_{E_1} = \|y\|_A$.
$\|\cdot\|_A$ - норма. 1). $\|y\|_A = 0 \Leftrightarrow \|A^{-1}y\|_{E_1} = 0 \Leftrightarrow A^{-1}y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
2) $\|\lambda y\|_A = |\lambda| \|y\|_A$, 3) $\|y_1 + y_2\|_A = \|A^{-1}(y_1 + y_2)\|_{E_1} =$
$= \|A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2\|_{E_1} \le \|A^{-1}y_1\|_{E_1} + \|A^{-1}y_2\|_{E_1} = \|y_1\|_A + \|y_2\|_A$.

E_2 повний відносно $\|\cdot\|_A$. $E_2 \ni y_n$ - фунд. відносно $\|\cdot\|_y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|y_n - y_m\|_A \to 0$, $n, m \to \infty$, $\Leftrightarrow \|A^{-1}(y_n - y_m)\|_{E_1} = \|A^{-1}y_n - A^{-1}y_m\|_{E_1}$
$z_n = A^{-1}y_n \Rightarrow z_n$ фундаментальна в $E_1 \Rightarrow \exists z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$
$A^{-1}y_n \to z$, $y = Az \in E_2$, $z = A^{-1}y \Rightarrow \underset{\|A^{-1}y_n - A^{-1}z\|_{E_1}}{\|y_n - y\|_A} \to 0$.

Крім того $\|Ax\|_{E_2} \le \|A\| \|x\|_{E_1}$, $y = Ax$, $x = A^{-1}y$
$\underline{\|y\|_{E_2}} \le \|A\| \|A^{-1}y\|_{E_1} = \underline{\|A\| \|y\|_A}$, $I: (E_2, \|\cdot\|_A) \to (E_2, \|\cdot\|_{E_2})$.

Залишається $\boxed{\exists C: \|y\|_A \le C\|y\|_{E_2}}$

$$\underline{\underset{\|A^{-1}y\|_1}{\|y\|_A} \le C\|y\|_{E_2}}$$

Лема 1. E – л.н. з двома нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, причому E – повний відносно $\|\cdot\|_1$, $\exists c: \|x\|_2 \le C\|x\|_1$.

[Позначимо $B_r^j(x)$, $j=1,2$, $r>0$, $x \in E$ – куля радіусу r відносно $\|\cdot\|_j$, з центром в x, $B_r^j(x) = \{y \in E \mid \|y-x\|_j < r\}$.

Якщо $\exists\, r>0$: $B_1^2(0) \subset \overline{B_r^1(0)}^{\|\cdot\|_2} \Rightarrow B_1^2(0) \subset B_{2r}^1(0)$

$\Rightarrow \exists c: \|x\|_1 \le C\|x\|_2$. $\boxed{!}$

$\underline{\underline{Д}}$ Нехай $\exists r$, $B_1^2(0) \subset \overline{B_r^1(0)}^{\|\cdot\|_2}$. $\ni x \Rightarrow \underline{B_\varepsilon^2(x) \cap B_r^1(0) \neq 0}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow \underbrace{B_1^2(0) \subset B_r^1(0) + B_{\frac{1}{2}}^2(0)} = \{x+y) \; \|x\|_1 < r, \|y\|_2 < \frac{1}{2}\}$

$\forall y$, $\|y\|_2 < 1 \Leftrightarrow y \in B_1^2(0)$.

$\exists\, x_1 \in B_r^1(0)$, $y_1 \in B_{\frac{1}{2}}^2(0)$, $\underline{y = x_1 + y_1}$.

$B_{1/2^n}^2(0) \subset B_{r/2^n}^1(0) + B_{1/2^{n+1}}^2(0)$,

$y_1 = x_2 + y_2$, $x_2 \in B_{r/2}^1(0)$, $y_2 \in B_{1/4}^2(0)$, ...

~~$y_{n-1} = x_n + y_n$~~ $y_n = x_{n+1} + y_{n+1}$, $y_n \in B_{1/2^n}^2(0)$, $x_{n+1} \in B_{r/2^n}^1(0)$

$\underline{y = x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_n}$. $\|x_j\|_1 < \frac{r}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots, n, \dots$

$\Rightarrow \exists\, x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, $\Rightarrow$ $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ в $\|\cdot\|_2$, $\|y_n\|_2 \to 0$

збіжність в $\|\cdot\|_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = y}}$, $y = \sum_{j=1}^{n} x_j + y_n$

$\Rightarrow \|x\|_1 = \|y\|_1 \le \|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{2^j} = r$

$\Rightarrow \|y\|_1 < 2r \Rightarrow y \in B_{2r}^1(0)$.

тобто $\|y\|_2 < 1 \Rightarrow \|y\|_1 < 2r \Rightarrow \exists C: \forall y \in E \; \|y\|_1 \le C\|y\|_2$

$\boxed{!}$

Теорема Бера про категорії. Нехай X - повний м.п.

$X_j,\ j=1,2,\dots$ - відкриті скрізь щільні в X $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$ - щільна в X.

E - банахів, $E=\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, X_j - замкнені, $\Rightarrow$

$\exists X_j$ з непорожньою внутрішністю, тобто

$\exists j,\ \exists x\in E,\ \varepsilon:\ B_\varepsilon(x)\subset X_j$.

Лема 2 Нехай E - л.п. з двома нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, причому $(E,\|\cdot\|_1)$, $(E,\|\cdot\|_2)$ - банахів, $\exists c: \|x\|_2\le c\|x\|_1$ тоді $\exists C>0: \|x\|_1\le C\|x\|_2\ \forall x\in E$.

Д. в $(E,\|\cdot\|_2)$ розглянемо $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B^1_n(0)}^{\|\cdot\|_2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists j,\ x_0\in E,\ r>0\quad B^2_r(x_0)\subset\overline{B^1_j(0)}^{\|\cdot\|_2}$.

$B^2_1(x_0)\subset\overline{B^1_{j/r}(0)}^{\|\cdot\|_2}\Rightarrow B^2_1(0)\subset\overline{B^1_{j/r}(-x_0)}^{\|\cdot\|_2}$

$\boxed{B^1_{j/r}(-x_0)\subset B_{j/r+\|x_0\|}(0)}$

Нехай $\|x\|_2<1$, $\Leftrightarrow x\in B^2_1(0)$

? $\|x\|_1=\|x+x_0-x_0\|_1\le\|x+x_0\|_1+\|x_0\|_1\le j/r+\|x_0\|$

$\Rightarrow B^2_1(0)\subset\overline{B_{j/r+\|x\|_1}(0)}^{\|\cdot\|_2}$

∎

Спряжений оператор.

Озн. E_1, E_2 – л.н.п. $A \in L(E_1, E_2)$. A^* - оператор $E_2' \to E_1'$

$$(A^* l)(x) = l(Ax), \quad l \in E_2',\ x \in E_1.$$

Т. $A^* l \in E_1'$, $\quad A^* \in L(E_2', E_1')$, $\quad \|A^*\| = \|A\|$.

Д. Оцінимо $\|A^* l\|$. $|(A^* l)(x)| = |l(Ax)| \le \|l\| \|Ax\|$

$$\le \|l\| \|A\| \|x\| \Rightarrow \|A^* l\| \le \|A\| \|l\| \Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|.$$

Покажемо, що тут рівність. За наслідком з т. Г-Б

$\exists l \in E_2'$, $\|l\| = 1$, $l(Ax) = \|Ax\|$.

$$\|Ax\| = l(Ax) = |l(Ax)| = |(A^* l)(x)| \le \|A^*\| \|l\| \|x\| = \|A^*\| \|x\|$$

$\Rightarrow \|A\| \le \|A^*\|$. ■

Пр. $E_1 = H_1$, $E_2 = H_2$ – гільбертові пр-ри

$\forall l \in H_1'$ $\exists a \in H_1$: $l(x) = (x, a)_1$

Нехай $A \in L(H_1, H_2)$

$$(A^* l)(x) = l(Ax) = (Ax, a)_{H_2} \Rightarrow$$

$$(A^* l)(x) = (x, A^* a)_{H_1} \qquad \Rightarrow (Ax, a)_{H_2} = (x, A^* a)_{H_1}.$$

Наслідок Нехай $H_1 = H_2 = H$ - сепарабельний, (e_j) - о.н.б.

$$A \mapsto (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}, \quad \Rightarrow \quad A^* \mapsto (\overline{a}_{kj})_{j,k=1}^{\infty}$$

Властивості $A, B \in L(E_1, E_2) \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*$

$(\lambda A)^* = \lambda A^*$, $\quad A \in L(H_1, H_2)$, то $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

Т. $A \in L(E_1, E_2)$, $B \in L(E_2, E_3)$ тоді $BA \in L(E_1, E_3)$

і $(BA)^* = A^* B^*$.

Д. $((BA)^* l)(x) = l(BAx) = l(B(Ax)) = (B^* l)(Ax) =$

$= (A^*(B^* l))(x) = (A^* B^* l)(x)$

Т. Нехай E_1, E_2 рефлексивні, тобто $E_1'' = E_1$, $E_2'' = E_2$,

$A \in L(E_1, E_2) \Rightarrow (A^*)^* = A$

$E_1 \ni x \mapsto L_x \cancel{(\ell)}$, $L_x(\ell) = \ell(x)$.

$$((A^*)^* L_x)(\ell) = L_x(A^*\ell) = (A^*\ell)(x) = \ell(Ax) = \underbrace{(A L_x)(\ell)}_{L''_{Ax}(\ell)}.$$

$\boxed{\equiv}$