Лінійні неперервні оператори

E_1, E_2 - л.н.п., $E_1 \ni x \mapsto Ax \in E_2$ лінійний,

$\forall x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\quad A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$.

Пр. 0. $E_2 = \mathbb{K}$, $E \to \mathbb{K}$ - л.н.ф-л.

1. $A0 = 0$.
2. A - неперервний в x_0, то непер. скрізь
3. A - неперервний $\Leftrightarrow$ A обмежений,

$\exists c$, що $\forall x \in E_1$ $\quad \|Ax\|_2 \le c\|x\|_1$.

Пр. 1 $\quad E_1 = E_2 = \mathbb{C}^n$, $\quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$(e_j)_{j=1}^n$, $\quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $\quad Ax = \sum_{j=1}^n x_j A e_j$

$$Ae_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k = \sum_{j,k=1}^n a_{kj} x_j e_k = \sum_k (Ax)_k e_k$$

$A \to (a_{kj})_{k,j=1}^n$

$$\|Ax\| = \sum_k \left|\sum_j a_{kj} x_j\right| \le \sum_k \sum_j |a_{kj}||x_j| \le$$

$$\le \max_j \sum_k |a_{kj}| \sum_j |x_j| = \max_j \sum |a_{kj}| \, \|x\|$$

~~$\|A\| \le$~~ Пр 2. Нехай в E_1 $(e_j)_{j=1}^\infty$, E_2 $(f_j)_{j=1}^\infty$

$E \ni x = \sum_{j=1}^\infty x_j e_j$, $\quad Ax = \sum_j x_j (Ae_j) = \sum_j x_j \sum_k a_{kj} f_k$

Пр 3. $\quad E_1 = E_2 = C[0,1]$, $\quad \varphi \in C[0,1]$

$(M_\varphi x)(t) = \varphi(t) x(t)$, $\quad t \in [0,1]$

Вправа $\quad M_\varphi$ - обмежений, $\quad \|M_\varphi x\| \le \|\varphi\| \|x\|$.

Пр. 4. $\quad E_1 = E_2 = C[0,1]$, $\quad K(\cdot,\cdot) \in C[0,1]\times[0,1]$

$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s) x(s)\, ds$,

$\|Ax\| = \max_t |(Ax)(t)| \le \max_t \int |K(t,s)|\, ds \cdot \|x\|$

A - обмежений $\Leftrightarrow \exists C: \forall x \in E \ \|Ax\| \le C\|x\|$

$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Пр. 1 $\mathbb{C}^n$, $\|x\| = \sum_i |x_i|$, $\|Ax\| \le \max\limits_j \sum |a_{kj}| \|x\|$

~~$x = e_j$, $Ae_j = j_0$~~ $\|Ae_{j_0}\| = \sum_k |a_{kj_0}|$

Пр. 2 $E = C[0,1]$, $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|$.

Пр. 3. $E = C'[0, 2\pi]$, $\|x\| = \max\limits_{[0,2\pi]} |x(t)|$

$(Ax)(t) = x'(t)$, $x_n = \sin nt$ $\|x_n\| = 1$

$\|Ax_n\| = n$ - необмежений.

Простір неперервних о-рів.

E_1, E_2 - л.н.п., $L(E_1, E_2)$ - м-на всіх л.н.о. з E_1 в E_2. $\forall A_1, A_2 \in L(E_1, E_2)$ $\forall \alpha, \beta \in K$

$(\alpha A_1 + \beta A_2)x = \alpha A_1 x + \beta A_2 x \in L(E_1, E_2)$.

Т. Якщо E_2 - банахів, то $L(E_1, E_2)$ - повний.

Д. Нехай $(A_j)_{j=1}^\infty \subset L(E_1, E_2)$ - фунд. $\Leftrightarrow \|A_j - A_k\| \to 0$, $j, k \to \infty$

$\forall x \in E$ $A_j x$, $\|A_j x - A_k x\|_{E_2} = \|(A_j - A_k)x\|_{E_2} \le \|A_j - A_k\| \|x\| \to 0$

$\Rightarrow A_j x$ - фундаментальна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{j\to\infty} A_j x =: Ax$. $\boxtimes$

Збіжність в $L(E_1, E_2)$

1) $A_j \to A \Leftrightarrow \|A_j - A\| \to 0$. рівномірна

2) $A_j \xrightarrow{s} A$, $A = s\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} A_j$, якщо $\forall x \in E$, $A_j x \to Ax$ в E_2

1) $\Rightarrow$ 2) $\forall x \in E$, $\|A_j x - Ax\| = \|(A_j - A)x\| \le \|A_j - A\| \|x\| \to 0$

$E_1 = E_2 = \ell_2$, $e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots 0)$ (e_j) - о.н.б.

$H_n \subset \ell_2$, $H_n = $ л.о. $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$P_n x = пр_{H_n} x$.

Вправа P_n - лінійний обмежений, $\|P_n\| = 1$

$\forall x \in \ell_2$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, $P_n x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to x$, $n \to \infty$

тобто $P_n \xrightarrow{s} I$, але при $n \neq m$ $\|P_n - P_m\| = 1$
не фундаментальна

3) Слабка збіжність $A_n \xrightarrow{w} A$, $A = w\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n$,
якщо $\forall x \in E_1$ $A_n x \xrightarrow{w} Ax$.

Т. Банаха-Штейнгауза для операторів.
Нехай E_1, E_2 - банахові. Якщо $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена в кожній точці, $\forall x \in E_1$ $\exists c_x : \|A_n x\| \le c_x$
$\Rightarrow \|A_n\| \le c$ для деякого c.

Т. Нехай E_1, E_2 - банахові, $\Rightarrow L(E_1, E_2)$ повний відносно сильної збіжності, $(A_j)_{j=1}^{\infty}$, що $\forall x \in E_1$ $(A_j x)_{j=1}^{\infty}$ - фундаментальна в $E_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists A \in L(E_1, E_2)$, $A_n \xrightarrow{s} A$.

Добуток операторів. $A \in L(E_1, E_2)$ $B \in L(E_2, E_3)$
$BA : E_1 \to E_3$, $\Rightarrow \forall x \in E_1$
$\|B(Ax)\|_{E_3} \le \|B\| \|Ax\|_{E_2} \le \|B\| \|A\| \|x\|_{E_1} \Rightarrow \cancel{\|AB\|}$
$\|BA\| \le \|B\| \|A\|$

Пр. $E_1 = E_2 = E_3 = \mathbb{C}^n$, $A \to (a_{jk})$, $B \to (b_{jk})$,
то AB задається добутком $[a_{jk}] \cdot [b_{jk}]$

Пр. $E = C[0,1]$ $M_{\varphi_1} \cdot M_{\varphi_2} = M_{\varphi_1 \cdot \varphi_2}$

$E_1 = E_2$ банахів $A \in L(E_1, E_1) = L(E_1)$, $B \in L(E_1)$

У цьому випадку $L(E_1)$ - банахова алгебра,

тобто: 1. Л. простір. 2. алгебра. $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$

I - одиничний о-р. $L(E_1)$ - банахова алгебра з 1.

<u>Обернений оператор.</u> $A: E_1 \to E_2$

~~Оз~~ і Відображення $A: E_1 \to R(A)$ (образ A)

має обернене $\Leftrightarrow$ A ін'єкція.

Для лінійних о-рів ін'єктивність $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} A = 0$

$\operatorname{Ker} A = \{x \in E_1 \mid Ax = 0\}$

A - ін'єкція $\Rightarrow$ $\forall x_1 \neq x_2$ $Ax_1 \neq Ax_2 \Leftrightarrow A(x_1 - x_2) \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = 0$.

<u>Озн.</u> Якщо $\operatorname{Ker} A = 0$, то $\exists A^{-1}: R(A) \to E_1$,

$A^{-1}Ax = x$, $\forall x \in E_1$ - алгебраїчний обернений до A.

<u>Пр</u> $E = l_2$, $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ $Se_j = e_{j+1}$, $j = 1, 2 \ldots$

$R(S) =$ з.л.о. $\{e_2, e_3, \ldots\} \perp e_1$

<u>Пр.</u> $E = l_2$, $(e_j)_{j=1}^{\infty}$, $Ae_j = \frac{1}{j} e_j$, $\operatorname{Ker} A = 0$

$A^{-1}e_j = j e_j$, $j = 1, 2, \ldots$ - не є обмежений

<u>Озн.</u> $A \in L(E_1, E_2)$ оборотний, якщо:

1) $\operatorname{Ker} A = 0$. 2) $R(A) = E_2$ 3) $A^{-1} \in L(E_2, E_1)$

$A \in L(E_1, E_2)$. $Ax = y$, $y \in R(A)$

$\exists A^{-1} \Rightarrow$ розв'язок $\exists$ $\forall y \in E_2$, розв'язок єдиний, розв'язок неперервно залежить від y.

T. $A \in L(E_1, E_2)$, ~~$\exists A^{-1} \Leftrightarrow$~~ $R(A) = E_2$, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow$
$\exists c$, що $\forall x \in E$, $\|Ax\| \geq c\|x\|$.

Д. Нехай $\exists A^{-1}$, $\forall y \in E_2$ $\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\|$
$\Rightarrow \exists x : y = Ax \Rightarrow \|\underbrace{A^{-1}Ax}_{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|A\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$

Нехай $\forall x$ $\|Ax\| \geq c\|x\| \Rightarrow \operatorname{Ker} A = 0$.
$\Rightarrow \exists y : x = A^{-1}y \Rightarrow \|\underbrace{AA^{-1}y}_{y}\| \geq c\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$ ■

T. Нехай E — банахів, $A \in L(E)$, $\|A\| = q < 1$
$\Rightarrow I - A$ оборотний, $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$
причому ряд збігається рівномірно.

Д. $S_n = I + A + \ldots + A^n$ — фундаментальна,
$\|S_{n+p} - S_n\| = \|A^{n+1} + \ldots + A^{n+p}\| \leq \|A^{n+1}\| + \ldots + \|A^{n+p}\| \leq$
$\leq \|A\|^{n+1} + \ldots + \|A\|^{n+p} \leq q^{n+1} + \ldots + q^{n+p} \to 0, \ n \to \infty$

E — банахів $\Rightarrow L(E)$ повний $\Rightarrow S_n \to S \in L(E)$.
Доведемо, що $S(I-A) = (I-A)S = I$
$\|(I-A)S_n - (I-A)S\| = \|(I-A)(S_n - S)\| \leq \|I - A\|\underbrace{\|S_n - S\|}_{\to 0}$
$S_n(I-A) = (I-A)S_n = I + A + \ldots + A^n - A - A^2 - \ldots - A^n - A^{n+1}$
$= I - A^{n+1} \Rightarrow \|S_n(I-A) - I\| = \|A^{n+1}\| \leq q^{n+1} \to 0$ ■

T. E_1, E_2 — банахові, $A, B \in L(E_1, E_2)$, $\exists A^{-1}$,
$\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow A + B$ оборотний.

Д. $A + B = A + \underbrace{AA^{-1}}_{I}B = A(I + A^{-1}B)$, $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\|$
$< \|A^{-1}\|\|A^{-1}\|^{-1} \leq 1$
$\Rightarrow \exists (I + A^{-1}B)^{-1}$, крім того $\exists A^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (A+B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$ ■

$\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\|B\| < \|A^{-1}\|\|A^{-1}\|^{-1} = 1$
$\Rightarrow \exists q < 1$ $\|A^{-1}B\| < q$