1) E — л.н.п. $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$

2) Лінійні непер. ф-л. на E $\ell: E \to \mathbb{C}$

$|\ell(x)| \le c\|x\| \quad \forall x \in E$

$\|\ell\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |\ell(x)|$ E' - простір спряжений до E

3) Т. $G \subset E$, $\ell \in G' \Rightarrow \exists \tilde{\ell} \in E'$, $\tilde{\ell}|_G = \ell$, $\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\|$

$\forall x \in E \quad \exists \ell \in E', \|\ell\| = 1, \ \ell(x) = \|x\|.$

Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у конкретних просторах.

<u>Означение</u> $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ - базис Шаудера, якщо $\forall x \in E$ $\exists!$ представлення $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, $x_j \in \mathbb{C}$.

$x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$

<u>Теорема</u> У ℓ_p, $1 \le p < \infty$ елементи $e_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, 0 \dots)$, $j = 1, 2, 3, \dots$

утворюють базис Шаудера.

<u>Доведення</u>. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_p$

$x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Потрібно довести збіжність

$S_n = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна:

$\|S_j - S_k\|_p = \|\sum\limits_{\ell=k+1}^{j} x_\ell e_\ell\|_p = \left(\sum\limits_{\ell=k+1}^{j} |x_\ell|^p\right)^{1/p}$

$k < j$

$x \in \ell_p \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \Rightarrow \|S_j - S_k\| \to 0, \ j, k \to \infty.$

$\Rightarrow \exists \lim S_j$. Покажемо, $S_j \to x$

$\|x - S_j\| = \|\sum\limits_{\ell=j+1}^{\infty} x_\ell e_\ell\| = \left(\sum\limits_{\ell=j+1}^{\infty} |x_\ell|^p\right)^{1/p} \to 0, \ j \to \infty.$

Т. $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді $\exists$ ізометричний ізоморфізм $(\ell_p)' = \ell_{p'}$, тобто $\forall f \in (\ell_p)' \Leftrightarrow (f_1, f_2, \ldots) \in \ell_{p'}$, що $\forall x \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j x_j$, причому $\|f\| = \|f\|_{p'}$.

Д. $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ - базис Шаудера $\Rightarrow \ell_p \ni x = (x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$,

тоді $f(x) = f\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j f_j$, $f_j := f(e_j)$.

Нехай $\ell_p \ni x = (x_1, x_2, \ldots)$, $\ell_{p'} \ni f = (f_1, f_2, \ldots)$

тоді $|f(x)| = \left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j x_j\right| \le \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |f_j|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p}\right)^{1/p} = \|f\|_{p'} \|x\|$

$\Rightarrow \|f\| \le \|f\|_{p'}$, тобто $\ell_{p'} \subseteq (\ell_p)'$.

Доведемо обернене включення, якщо $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k f_k \Rightarrow$
$\Rightarrow (f_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$.

$y_n = \left(|f_1|^{p'-1} e^{-i \arg f_1}, |f_2|^{p'-1} e^{-i \arg f_2}, \ldots, |f_n|^{p'-1} e^{-i \arg f_n}, 0, \ldots 0\right)$

$\Rightarrow y_n \in \ell_p$,

$$f(y_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j |f_j|^{p'-1} e^{-i \arg f_j} = \sum_{j=1}^{n} \cancel{e^{i \arg f_j}} |f_j| |f_j|^{p'-1} \cancel{e^{-i \arg f_j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |f_j|^{p'} \ge 0 \Rightarrow f(y_n) = |f(y_n)|$$

$$|f(y_n)| \le \|f\| \|y_n\| = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left| |f_j|^{p'-1} e^{-i \arg f_j} \right|^{p}\right)^{1/p} =$$

$$= \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{(p'-1)p}\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{p'}\right)^{1/p}, \quad (p'-1)p = p'$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{p'}\right)^{1} \le \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{p'}\right)^{1/p} \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{p'}\right)^{1/p'} \le \|f\|$$

$\Rightarrow \|f\|_{p'} \le \|f\|$. ∎

Т $(l_1)' = l_\infty$, тобто $(l_1)' \ni f \Leftrightarrow (f_1, f_2, \dots) \in l_\infty$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j x_j \,, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1, \quad \|f\| = \|f\|_\infty .$$

Д. $l_1 \ni x = (x_1, x_2, \dots)$, $l_\infty \ni f = (f_1, f_2, \dots)$,

тоді $|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} f_j x_j\right| \le \sup_j |f_j| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|f\|_\infty \|x\|$.

$\Rightarrow$ $l_\infty \subset (l_1)'$.

Нехай $(f_j)_{j=1}^{\infty} \notin l_\infty \Rightarrow \forall n \ge 1 \ \exists j_n : |f_{j_n}| > n$

тоді $|f(e_{j_n})| = |f_n| > n$, оскільки $\|e_{j_n}\| = 1$,

це суперечить обмеженості f.

$\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \ge \sup\limits_j |f(e_j)| = \sup\limits_j |f_j| = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|f\| = \|f\|_\infty$. ☒

<u>Наслідок $p=\infty$:</u> $l_1 \subset (l_\infty)'$ ізометрично, тобто

$\forall x \in l_\infty$, $\forall f \in l_1$

$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j x_j$ – лінійні непер. ф-л., $\|f\| = \|f\|_1$

$|f(x)| \le \|f\|_1 \|x\|$

<u>Вправа</u> довести $\|f\| = \|f\|_1$.

<u>Приклад.</u> Функціонал $f \in (l_\infty)'$, який не задається елементом з l_1.

c – простір збіжних послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$

$c \subset l_\infty$. $\forall x \in c$ покладемо $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$

$f \in (c)'$. За т. Гана-Банаха

$\exists \hat{f} \in (l_\infty)'$, $\hat{f}|_c = f$, $\|\hat{f}\| = \|f\|$. Не задається

$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j x_j$, $f \in l_1$, бо $\hat{f}$ не залежить від зміни скінченної кількості координат x_j

Простір, спряжений до $L_p(R, d\mu)$, $1<p<\infty$.

Теорема. Нехай $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, μ - σ-скінченна.
Тоді: $(L_p(R,d\mu))' = L_{p'}(R,d\mu)$, тобто
$(L_p(R,d\mu))' \ni l \iff h \in L_{p'}(R,d\mu)$,

$$l(x) = \int_R h(t)\, x(t)\, d\mu(t), \quad \|l\| = \|h\|_{p'}.$$

Д. Нехай $h \in L_{p'}(R,d\mu)$, тоді $\forall x \in L_p(R,d\mu)$

$$|l(x)| = \left|\int_R h(t)\, x(t)\, d\mu(t)\right| \le \|h\|_{p'} \|x\|,$$

тобто $\|l\| \le \|h\|_{p'}$, $L_{p'}(R,d\mu) \subseteq (L_p(R,d\mu))'$.

Нехай $\mu(R)<\infty$ [Вправа: загальний випадок].

$\mathfrak{R} \ni A \mapsto \chi_A \in L_p(R,d\mu)$. Нехай $l \in (L_p(R,d\mu))'$

$\omega: A \mapsto l(\chi_A)$. Покажемо, що ω - заряд.
σ-адитивність. Нехай $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$
$\chi_A(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(t)$, причому ряд збігається в $L_p(R,d\mu)$

$$\omega(A) = l(\chi_A) = l\left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} l(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega(A_j).$$

Покажемо, що $\omega \ll \mu$. Нехай $\mu(A)=0$
$\Rightarrow \chi_A = 0 \mod \mu \Rightarrow \chi_A$ - нуль в $L_p(R,d\mu) \Rightarrow \omega(A)=0$.

За т. Радона-Никодима $\exists h \in L_1(R,d\mu)$,
що $\forall A \in \mathfrak{R}$ $\omega(A) = \int_A h(t)\, d\mu(t) =$

$$\boxed{= \int_R h(t)\, \chi_A(t)\, d\mu(t) = l(\chi_A)}$$

Отже, для простої обмеженої ф-ї x

$$l(x) = \int_R h(t)\, x(t)\, d\mu(t).$$

Нехай x - обмежена вимірна ф-я, тоді $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ простих обмежених ф-й, $x_n \rightrightarrows x$.

За т. Лебега $\underset{\downarrow\, l(x)}{l(x_n)} = \int_R h(t)\, x_n(t)\, d\mu(t) \to \int_R h(t)\, x(t)\, d\mu(t)$

Покажемо, що $h \in L_{p'}(R, d\mu)$.

Покладемо $h_n(t) = \begin{cases} h(t), & |h(t)| \le n \\ 0, & |h(t)| > n \end{cases}$

Розглянемо $y_n(t) = |h_n(t)|^{p'-1} e^{-i \arg h_n(t)}$

$$\|y_n\| = \left(\int_R |y_n(t)|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_R |y_n(t)|^{(p'-1)p} d\mu(t)\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_R |y_n(t)|^{p'} d\mu(t)\right)^{1/p}, \quad \text{бо } (p'-1)p = p'.$$

$$|l(y_n)| = \left|\int h(t)\, |h_n(t)|^{p'-1} e^{-i\arg h_n(t)} d\mu(t)\right| = \left|\int_R |h(t)|^{p'} d\mu(t)\right|$$

З іншого боку,

$$|l(y_n)| \le \|l\| \left(\int_R |h_n(t)|^{(p'-1)p}\right)^{1/p} = \|l\| \left(\int_R |h_n(t)|^{p'} d\mu(t)\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \int_R |h_n(t)|^{p'} d\mu \le \|l\| \left(\int_R |h_n(t)|^{p'} d\mu\right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\left(\int_R |h_n(t)|^{p'} d\mu\right)^{1/p'} \le \|l\|. \Rightarrow \text{л. Фату} \Rightarrow \|h\|_{p'} \le \|l\|$$

$$\Rightarrow h \in L_{p'}(R, d\mu).$$

Ми довели, $l(x) = \int_R h(t)\, x(t)\, d\mu(t)$ для обмежених вимірних ф-й x. $\Rightarrow \exists!$ продовження l на увесь простір $L_p(R, d\mu)$. $\boxtimes$

Простір, спряжений до $L_1(R, d\mu)$.

$\underline{\underline{T}}$. Нехай μ σ-скінченна, тоді $(L_1(R,d\mu))' = L_\infty(R,d\mu)$.

$(L_1(R,d\mu))' \ni l \Leftrightarrow h \in L_\infty(R,d\mu)$,

$$l(x) = \int_R h(t)\,x(t)\,d\mu(t).$$

$\underline{\mathcal{D}}$. $h \in L_\infty(R,d\mu) \Rightarrow |l(x)| = \left|\int_R h(t)\,x(t)\,d\mu(t)\right| \le$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{t\in R} |h(t)| \int |x(t)|\,d\mu(t) = \|h\|_\infty \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|l\| \le \|h\|_\infty, \quad L_\infty(R,d\mu) \subset (L_1(R,d\mu))'.$$

<u>Вправа</u>: довести в зворотний бік.

$(L_\infty(R,d\mu))'$ - простого опису немає,

$L_1(R,d\mu) \subset (L_\infty(R,d\mu))'$, рівності немає

Простір, спряжений до $C(Q)$.

Нехай Q - компактний метр. пр-р. $\mathcal{B}(Q)$ - Борелева σ-ал.

$\omega: \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ - заряд, $\omega = \omega_+ - \omega_-$ регулярний,

якщо ω_+, ω_- - регулярні міри. $W(Q)$ - множина

усіх зарядів на $\mathcal{B}(Q)$. - лінійний простір.

$\|\omega\| = |\omega|(Q)$, $|\omega| = \omega_+ + \omega_-$ - норма,

і $W(Q)$ - Банахів простір.

Нехай $C(Q)$ - м-на неперер. ф-й на Q, $\|x\| = \max_{t\in Q} |x(t)|$

$\underline{T}$ (Маркова). $C(Q)' = W(Q)$,

$C(Q)' \ni l \Leftrightarrow \omega \in W(Q)$, причому

$$l(x) = \int_Q x(t)\,d\omega(t), \quad \|l\| = \|\omega\|.$$

Т. Ріса. $(C([0,1]))' \ni l \Leftrightarrow \exists g$ обмеженої варіації на $[0,1]$ так, що $l(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$ - інтеграл Рімана–Стілтьєса,

причому $\|l\| = V(g;[0,1])$.

Д. $C([0,1]) \subset M([0,1])$ - простір усіх обмежених ф-й, $\|x\| = \sup_{[0,1]} |x(t)|$. За теоремою Гана-Банаха

$\exists \tilde{l} \in (M([0,1]))'$, $\tilde{l}|_C = l$, $\|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Побудуємо ф-ю g. Покладемо $u_\lambda(t) = \chi_{[0,\lambda]}(t)$, $\lambda \in [0,1]$,

$g(\lambda) = \tilde{l}(u_\lambda)$. $\quad \pi$ - розбиття $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$

$$V_\pi(g,[0,1]) = \sum_{j=0}^{n-1} |g(\lambda_{j+1}) - g(\lambda_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (g(\lambda_{j+1}) - g(\lambda_j))$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (\tilde{l}(u_{\lambda_{j+1}}) - \tilde{l}(u_{\lambda_j})) = \tilde{l}\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (u_{\lambda_{j+1}} - u_{\lambda_j})}_{z}\Big)$$

Ф-я $z = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (u_{\lambda_{j+1}} - u_{\lambda_j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j \chi_{(\lambda_j, \lambda_{j+1}]}$

приймає значення $0, \pm 1 \Rightarrow \|z\| = 1$

$\Rightarrow V_\pi(g;[0,1]) = \tilde{l}(z) \le \|l\| \Rightarrow V(g;[0,1]) \le \|l\|$.

Доведемо, що $l(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$, $x \in C([0,1])$.

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x\left(\tfrac{j+1}{n}\right)\left(u_{\left(\frac{j+1}{n}\right)}(t) - u_{\left(\frac{j}{n}\right)}(t)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} x\left(\tfrac{j+1}{n}\right) \chi_{\left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]}(t)$$

$$\tilde{l}(x_n) = \tilde{l}\left(\sum_{j=0}^{n-1} x\left(\tfrac{j+1}{n}\right)\left(u_{\left(\frac{j+1}{n}\right)}(t) - u_{\left(\frac{j}{n}\right)}(t)\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} x\left(\tfrac{j+1}{n}\right)\left(g\left(\tfrac{j+1}{n}\right) - g\left(\tfrac{j}{n}\right)\right) \text{ - інтегральна сума}$$

$x_n \rightrightarrows x \Rightarrow x_n \to x$ в $M([0,1])$, тому $\tilde{l}(x_n) \to \tilde{l}(x)$,

оскільки $x \in C([0,1])$, $\tilde{l}(x_n) \to l(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$.

$|l(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,dg(t)\right| \le \left|\int_0^1 |x(t)|\,dg(t)\right| \le \max |x(t)|\, V(g,[0,1])$

$= \|x\|\,\|g\|$. $\blacksquare$