Функціональний аналіз. Лекція 6

Василь Островський

Магістратура КАУ

11 квітня 2020 р.

Лінійні неперервні функціонали

Нехай E — лінійний нормований простір над полем $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Функцію на лінійному просторі

$$E \ni x \mapsto \ell(x) \in \mathbb{K}$$

називають *функціоналом*. Функціонал ℓ *лінійний*, якщо $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\ell(\lambda x + \mu y) = \lambda\,\ell(x) + \mu\,\ell(y).$$

Функціонал ℓ *неперервний*, якщо $\ell\colon E \to \mathbb{K}$ — неперервне відображення. Функціонал ℓ *обмежений*, якщо існує $c \geq 0$, що $|\ell(x)| \leq c\|x\|$. Внаслідок однорідності обмеженість еквівалентна $|\ell(x)| \leq c$ для $x \in B_1(0)$.

Лема

Якщо ℓ неперервний в деякій точці, то він неперервний скрізь.

Доведення.

Нехай ℓ неперервний в x_0. Якщо $x_n \to x$, то $x_n - x + x_0 \to x_0$, і $\ell(x_n) = \ell(x_n - x + x_0 + x - x_0) = \ell(x_n - x + x_0) + \ell(x - x_0) \to \ell(x_0) + \ell(x - x_0) = \ell(x_0 + x - x_0) = \ell(x)$. $\square$

Обмеженість та неперервність. Норма функціонала

Теорема

Лінійний функціонал ℓ неперервний $\iff$ ℓ обмежений.

Доведення.

Нехай ℓ обмежений, тобто $|\ell(x)| \le c\|x\|$, $x \in E$. Якщо $x_n \to 0$, то $|\ell(x_n)| \le c\|x_n\| \to 0$, тобто ℓ неперервний в 0, а значить і у всьому E.

Навпаки, нехай ℓ необмежений. Тоді $\forall n > 0$ існує вектор $E \ni x_n \ne 0$, що $|\ell(x_n)| > n\|x_n\|$. Покладемо $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Тоді $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, але

$$|\ell(y_n)| = |\ell(\tfrac{x_n}{n\|x_n\|})| = \tfrac{|\ell(x_n)|}{n\|x_n\|} > 1 \not\to 0,$$

тобто ℓ не неперервний в 0. □

Нормою лінійного функціонала називається величина

$$\|\ell\| = \sup_{0 \ne x \in E} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |\ell(x)|.$$

ℓ неперервний тоді і лише тоді, коли $\|\ell\| < \infty$, $|\ell(x)| \le \|\ell\|\|x\|$.

Лінійні функціонали на скінченновимірних просторах

Нехай $\dim E = n < \infty$, скінченновимірний нормований простір, $e_1, \dots, e_n$ — базис в E. Для довільного $x \in E$ маємо

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,$$

тому

$$\ell(x) = \ell\Big(\sum_{j=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ell(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ell_j,$$

де $\ell_j = \ell(e_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Тому має сенс позначення $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$.

Наслідок

Будь-який лінійний функціонал на скінченновимірному просторі неперервний.

Норма функціонала $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ залежить від вибору норми в E.

Простір лінійних неперервних функціоналів

Нехай E — лінійний нормований простір. Позначимо E' множину усіх лінійних неперервних функціоналів на E.
На E' є природна структура лінійного простору:

$$(\lambda\ell + \mu m)(x) = \lambda\ell(x) + \mu m(x), \quad 0(x) = 0.$$

Норма в E' — норма лінійного функціонала, визначена раніше,

$$\|\ell\| = \sup_{0\neq x\in E} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |\ell(x)|$$
$$= \inf\{c > 0 \mid \forall x \in E \ |\ell(x)| \leq c\|x\|\}.$$

Перевіримо нерівність трикутника.

$$|(\ell + m)(x)| = |\ell(x) + m(x)| \leq |\ell(x)| + |m(x)|$$
$$\leq \|\ell\|\|x\| + \|m\|\|x\| = (\|\ell\| + \|m\|)\|x\|.$$

Візьмемо sup при $\|x\| = 1$, і одержимо $\|\ell + m\| \leq \|\ell\| + \|m\|$.

Означення

Лінійний нормований простір E' називається спряженим простором до E.

Повнота спряженого простору

Теорема

Спряжений простір E' до лінійного нормованого простору E – повний нормований простір.

Доведення

Нехай $(\ell_j)_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна в E'. Тоді $\forall x \in E$

$$|\ell_j(x) - \ell_k(x)| = |(\ell_j - \ell_k)(x)| \leq \|\ell_j - \ell_k\|\|x\|,$$

і внаслідок фундаментальності $(\ell_j)_{j=1}^{\infty}$ числова послідовність $(\ell_j(x))_{j=1}^{\infty}$ також фундаментальна, а отже, має границю $\ell(x) := \lim_{j\to\infty} \ell_j(x)$.
1. Лінійність: $\ell(\lambda x + \mu y) = \lim_{j\to\infty} \ell_j(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{j\to\infty} \ell_j(x) + \mu \lim_{j\to\infty} \ell_j(y) = \lambda\ell(x) + \mu\ell(y)$.
2. Неперервність: Оскільки $(\ell_j)_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна, вона обмежена, $\|\ell_j\| \leq c$, $j = 1, 2, \ldots$, тому $\forall n \geq 1, \forall x \in E$ маємо $|\ell_j(x)| \leq \|\ell_j\|\|x\| \leq c\|x\|$, та $|\ell(x)| = \lim_{j\to\infty} |\ell_j(x)| \leq c\|x\|$.

Продовження.

Таким чином, ℓ — лінійний неперервний функціонал.
Покажемо, що $\ell = \lim_{j\to\infty} \ell_j$. Оскільки послідовність $(\ell_j)_{j=1}^{\infty}$ фундаментальна, для довільного $\epsilon > 0$ існує N, що $\forall j, k > N$ виконується $\|\ell_j - \ell_k\| < \epsilon$. Тоді $\forall x \in E$ маємо

$$|\ell_j(x) - \ell_k(x)| \leq \|\ell_j - \ell_k\|\|x\| < \epsilon\|x\|.$$

Отже,

$$|\ell_j(x) - \ell(x)| = \lim_{k\to\infty} |\ell_j(x) - \ell_k(x)| \leq \epsilon\|x\|.$$

Оскільки

$$\|\ell_j - \ell\| = \inf\{c \mid \forall x \in E |\ell_j(x) - \ell(x)| \leq c\|x\|\},$$

це означає, що $\|\ell_j - \ell\| < \epsilon$, $j > N$, та $\ell_j \to \ell$. $\square$

Продовження лінійних функціоналів

Нехай E — лінійний нормований простір, $G \subset E$ — лінійна підмножина, яка, очевидно, також є нормованим простором.
Нехай на G задано лінійний неперервний функціонал ℓ.
Важлива задача: чи існує $\tilde{\ell} \in E'$, що є розширенням ℓ, тобто $\tilde{\ell}(x) = \ell(x)$, $x \in G$? (Вживається також позначення $\tilde{\ell} \upharpoonright_G = \ell$.)
Зауважимо, що $\{x \in G \mid \|x\| = 1\} \subset \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, тому

$$\|\ell\|_{G'} = \sup_{x\in G, \|x\|=1} |\ell(x)| \leq \sup_{x\in E, \|x\|=1} |\tilde{\ell}(x)| = \|\tilde{\ell}\|_{E'}.$$

Найцікавіший випадок — продовження зі збереженням норми, тобто існування $\tilde{\ell} \in E'$, $\tilde{\ell} \upharpoonright_G = \ell$, $\|\tilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{G'}$.
Якщо G — щільна множина в E, $\ell \in G'$, тоді ℓ — неперервна функція на G, тому вона однозначно продовжується до неперервної функції $\tilde{\ell}(x)$ на E.

Вправа

Перевірити, що $\tilde{\ell}(x)$ — лінійний функціонал, та $\|\tilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{G'}$.

Теорема Гана–Банаха

Розглянемо випадок, коли $G \subset E$ — нетривіальний (замкнений) підпростір.

Теорема

Нехай E — дійсний або комплексний лінійний нормований простір, $G \subset E$ — підпростір. Для довільного $\ell \in G'$ існує $\tilde{\ell} \in E'$, такий, що $\tilde{\ell}\restriction_G = \ell$, $\|\tilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{G'}$

Доведення

Доведення проведемо в три етапи.
1. У випадку дійсного простору доведемо можливість продовження функціонала з G на одновимірне роширення простору G зі збереженням норми.
2. Доведемо теорему для довільного дійсного простору E.
3. Доведемо теорему у комплексному випадку.

Випадок одновимірного розширення

Нехай E — дійсний нормований простір, $G \neq E$ — підпростір, та $E \ni y \notin G$. Покажемо, що $\ell \in G'$ можна продовжити зі збереженням норми на підпростір

$$E \supset F = \text{л.о.}(G \cup \{y\}) \ni x = g + \lambda y, \quad g \in G, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що вказане представлення $x = g + \lambda y$ однозначне. Якщо $\tilde{\ell} \in F'$, $\tilde{\ell}\restriction_G = \ell$, то

$$\tilde{\ell}(x) = \tilde{\ell}(g + \lambda y) = \ell(g) + \lambda c, \quad c = \tilde{\ell}(y).$$

Потрібно довести існування c, щоб виконувалось $\|\tilde{\ell}\|_{F'} \leq \|\ell\|_{G'}$. Ця нерівність еквівалентна умові: $\forall g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{\ell}(g + \lambda y)| = |\ell(g) + \lambda c| \leq \|\ell\| \|g + \lambda y\|$$

або

$$-\|\ell\|\|g + \lambda y\| \leq \lambda c + \ell(g) \leq \|\ell\|\|g + \lambda y\|,$$
$$-\|\ell\|\|g + \lambda y\| - \ell(g) \leq \lambda c \leq \|\ell\|\|g + \lambda y\| - \ell(g),$$
$$-\|\ell\|\|g/\lambda + y\| - \ell(g/\lambda) \leq c \leq \|\ell\|\|g/\lambda + y\| - \ell(g/\lambda),$$
$$-\|\ell\|\|h + y\| - \ell(h) \leq c \leq \|\ell\|\|h + y\| - \ell(h),$$

де в останніх нерівностях $h = g/\lambda$ — довільний елемент G.

Випадок одновимірного розширення. Продовження.

Таким чином, нам потрібно довести, що існує $c \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $h \in G$

$$-\|\ell\|\|h+y\| - \ell(h) \le c \le \|\ell\|\|h+y\| - \ell(h) \qquad (*)$$

Але для довільних $h_1, h_2 \in G$ маємо

$$\ell(h_2) - \ell(h_1) \le |\ell(h_2) - \ell(h_1)| = |\ell(h_2 - h_1)| \le \|\ell\|\|h_2 - h_1\|$$
$$= \|\ell\|\|(h_2 + y) - (h_1 + y)\| \le \|\ell\|\|h_1 + y\| + \|\ell\|\|h_2 + y\|,$$

або

$$-\|\ell\|\|h_1 + y\| - \ell(h_1) \le \|\ell\|\|h_2 + y\| - \ell(h_2)$$

Позначимо

$$a_1 = \sup_{h_1 \in G} \left(-\|\ell\|\|h_1 + y\| - \ell(h_1)\right),$$
$$a_2 = \inf_{h_2 \in G} \left(-\|\ell\|\|h_2 + y\| - \ell(h_2)\right),$$

Тоді $a_1 \le a_2$ і довільне $a_1 \le c \le a_2$ задовольняє (*). $\square$

Лема Цорна

Означення

Множина X називається частково впорядкованою, якщо на ній задано рефлексивне, транзитивне та антисиметричне відношення $\le$, тобто

1. $x \le x$

2. $x \le y$, $y \le z \implies x \le z$

3. $x \le y, y \le x \implies x = y$.

Елемент $x \in X$ максимальний, якщо $\forall y \in X$, $x \le y \implies y = x$.

Елемент $x \in X$ є верхньою межею для підмножини $Y \subset X$, якщо $y \le x$ для всіх $y \in Y$.

Частково впорядкована множина X називається ланцюгом (цілком впорядкованою, лінійно впорядкованою), якщо $\forall\ x, y \in X$ виконується $x \le y$ або $y \le x$.

Лема (Zorn)

Нехай X — непорожня частково впорядкована множина. Якщо для довільного ланцюга $Y \subset X$ існує верхня межа $x_Y \in X$, то множина X має максимальний елемент.

Дійсний простір. Загальний випадок.

Нехай $G \subset E$, $G \neq E$, $\ell \in G'$. Ми вже знаємо, що існують підпростори $E \supseteq P \supset G$ та розширення ℓ_P функціонала ℓ, $\|\ell_p\| = \|\ell\|$. Нехай X — множина усіх таких розширень.
X — частково впорядкована множина:

$$\ell_P \le \ell_Q \iff P \subseteq Q,\ \ell_Q \restriction_P = \ell_P.$$

Покажемо, що довільний ланцюг $Y = \{\ell_{P_\alpha},\}_{\alpha \in A} \subset X$ має верхню межу.
На лінійній множині $P_Y = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha \subset E$ задамо функціонал ℓ_Y: якщо $x \in P_Y$, то $\exists \alpha \in A$, $x \in P_\alpha$, і $\ell_Y(x) := \ell_{P_\alpha}(x)$. Означення коректне, оскільки $\ell_{P_\alpha} \restriction_{P_\beta} = \ell_{P_\beta}$, $\ell_{P_\beta} \le \ell_{P_\alpha}$. Очевидно, що $\|\ell_Y\| = \|\ell_\alpha\| = \|\ell\|$, також $\|\ell_Y\|$ за неперервністю продовжується до замкненого підпростору $\overline{P_Y}$, тобто $\ell_Y \in X$.
Тоді $\ell_{P_\alpha} \le \ell_Y$, $\alpha \in A$, тому ℓ_Y — верхня межа для Y.
За лемою Цорна X має максимальний елемент $\tilde{\ell}$. При цьому $\tilde{\ell}$ визначений на всьому просторі E, оскільки інакше він мав би розширення, що суперечить максимальності. □

Комплексний випадок

Нехай E — комплексний лінійний нормований простір.
Розглянемо дійсний простір $E_\mathbb{R}$, елементи якого є вектори з E, але операції розглядаються над полем $\mathbb{R}$ (приклад: $\mathbb{C}^1_\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.)
Нехай $\ell \in E'$. Тоді $m(x) = \operatorname{Re} \ell(x), n(x) = \operatorname{Im} \ell(x) \in E'_\mathbb{R}$.
Справді, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} m(\alpha x + \beta y) + i\, n(\alpha x + \beta y) &= \ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y) \\ &= \alpha(m(x) + i\, n(x)) + \beta(m(y) + i\, n(y)) \\ &= (\alpha m(x) + \beta m(y)) + i\,(\alpha n(x) + \beta n(y)). \end{aligned}$$

Оскільки $|m(x)|, |n(x)| \le |\ell(x)|$, маємо $\|n\|, \|m\| \le \|\ell\|$.
Функціонал ℓ відновлюється за своєю дійсною частиною m:

$$\ell(x) = m(x) - i\, m(i\, x).$$

Справді, $\forall x \in E$,

$$m(i\,x) + i\,n(i\,x) = \ell(i\,x) = i\,\ell(x) = i\,(m(x) + i\,n(x)) = -n(x) + i\,m(x),$$

тобто $n(x) = -m(i\,x)$.

Комплексний випадок. Закінчення.

Нехай $G \subset E$ — підпростір комплексного л.н.п. E. Розглянемо дійсні простори $G_{\mathbb{R}} \subset E_{\mathbb{R}}$, функціонал $\ell \in G'$ породжує дійсний функціонал $m \in G'_{\mathbb{R}}$. Його можна продовжити зі збереженням норми до функціонала $\tilde{m} \in E'_{\mathbb{R}}$. Покажемо, що

$$\tilde{\ell}(x) = \tilde{m}(x) - i\,\tilde{m}(i\,x)$$

— потрібне продовження ℓ на E зі збереженням норми.
Перевіримо лінійність $\tilde{\ell}$. Адитивність та однорідність відносно дійсних чисел очевидні. Перевіримо, що $\tilde{\ell}(i\,x) = i\,\tilde{\ell}(x)$.

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}(ix) &= \tilde{m}(i\,x) - i\tilde{m}(i^2x) = \tilde{m}(i\,x) + i\tilde{m}(x)\\ &= i(\tilde{m}(x) - i\,\tilde{m}(i\,x)) = i\,\tilde{\ell}(x).\end{aligned}$$

Перевіримо, що $\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\|$. Досить перевірити $\|\tilde{\ell}\| \le \|\ell\|$.
Зафіксуємо $x \in E$ та запишемо полярний розклад
$\tilde{\ell}(x) = \gamma|\tilde{\ell}(x)|$, $|\gamma| = 1$. Тоді
$|\tilde{\ell}(x)| = \bar{\gamma}\tilde{\ell}(x) = \tilde{\ell}(\bar{\gamma}x) = \tilde{m}(\bar{\gamma}x) \le \|\tilde{m}\|\|\bar{\gamma}x\| = \|m\|\|x\| \le \|\ell\|\|x\|$,
оскільки при $\tilde{\ell}(y) \in \mathbb{R}$ маємо $\tilde{\ell}(y) = \tilde{m}(y)$. □

Наслідки з теореми Гана–Банаха. 1

Теорема

Нехай E — л.н.п. над полем $\mathbb{K}$ дійсних чи комплексних чисел, $G \subset E$ — підпростір. Для довільного $y \notin G$ існує $\ell \in E'$, $\|\ell\| = 1$, для якого $\ell\restriction_G = 0$, та

$$\ell(y) = \rho(y, G) = \inf_{g \in G} \|y - g\|.$$

Доведення.

На підпросторі $F =$ л.о$(G \cup \{y\})$ задамо функціонал ℓ_0:

$$\ell_0(g + \lambda y) = \lambda\rho(y, G), \quad g \in G, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Очевидно, що $\ell_0 \in F'$, $\ell_0\restriction_G = 0$, $\ell_0(y) = \rho(y, G)$.

$$\begin{aligned}\|\ell_0\| &= \sup_{g \in G, \lambda \in \mathbb{K}} \frac{|\ell_0(g + \lambda y)|}{\|g + \lambda y\|} = \sup_{g \in G, \lambda \ne 0 \in \mathbb{K}} \frac{|\lambda|\,\rho(y, G)}{|\lambda|\,\|\lambda^{-1}g + y\|}\\ &= \rho(y, G) \sup_{g' \in G} \frac{1}{\|g' - y\|} = 1.\end{aligned}$$

За теоремою Гана–Банаха $\exists \ell \in E'$: $\|\ell\| = 1$, $\ell\restriction_G = 0$. □

Наслідки з теореми Гана–Банаха. 2

Наслідок

Нехай E — л.н.п., $y \neq 0 \in E$.
Існує $\ell \in E'$, $\|\ell\| = 1$ такий, що $\ell(y) = \|y\|$.

Справді, досить покласти в попередній теоремі $G = \{0\}$.
Зокрема, спряжений простір до лінійного нормованого простору непорожній.

Наслідок

Нехай E — л.н.п. Елементи E' розділяють точки E, тобто для довільних $x_1 \neq x_2 \in E$ існує $\ell \in E'$, що $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$.

Справді, для $y = x_1 - x_2$ існує $\ell \in E'$, $\ell(y) = \|y\| \neq 0$. Тоді $\ell(x_1) - \ell(x_2) = \ell(x_1 - x_2) = \ell(y) = \|y\| \neq 0$.

Наслідки з теореми Гана–Банаха. 3

Теорема

Множина $M \subset E$ тотальна в E (тобто з.л.о.$(M) = E$)
тоді і лише тоді, коли
з умови $\ell(x) = 0$ для всіх $x \in M$ випливає $\ell = 0$, $\ell \in E'$.

Доведення.

Необхідність. Нехай M тотальна в E та для деякого $\ell \in E'$ маємо $\ell(x) = 0$ при всіх $x \in M$. Внаслідок лінійності ℓ обертається в 0 на лінійній оболонці M, а внаслідок неперервності — також на її замиканні, тобто на E.
Достатність. Нехай кожен $\ell \in E'$, $\ell\restriction_M = 0$, є нулем на всьому E. Якщо M не тотальна, то підпростір $G =$ з.л.о.$(M) \neq E$. Виберемо ненульовий $y \notin G$, тоді існує $\ell \in E'$, $\ell\restriction_G = 0$, $\ell(y) = \|y\| \neq 0$. □

Ядро лінійного неперервного функціонала

Нехай E — л.н.п., $\ell \in E'$.

Означення

Ядро лінійного функціонала $\ker \ell = \{x \in E \mid \ell(x) = 0\}$.

Очевидно, що $G_0 = \ker \ell$ — підпростір в E. Більш того, якщо $\ell \neq 0$, то $\ker \ell$ — *гіперпідпростір*, тобто підпростір корозмірності 1. Це значить, що $E =$ л.о.$(G_0 \cup \{y\})$, $\ell(y) \neq 0$. Справді, нехай $y \notin G_0$. Покажемо, що довільний $x \in E$ можна подати у вигляді $x = g + \lambda y$, $g \in G_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Покладемо $\lambda = \frac{\ell(x)}{\ell(y)}$, тоді для вектора $g = x - \lambda y$ маємо

$$\ell(g) = \ell(x - \lambda y) = \ell(x) - \lambda \ell(y) = \ell(x) - \frac{\ell(x)}{\ell(y)} \ell(y) = 0,$$

тобто $g \in G_0$ і $x = g + \lambda y$ — потрібний розклад.
Аналогічно, зафіксуємо $\ell \in E', c \in \mathbb{K}$, тоді *гіперплощиною* називають множину $G_c = \{x \in E \mid \ell(x) = c\}$. Внаслідок лінійності маємо, що

$$G_c = G_0 + z = \{x + z \mid x \in G_0\},$$

де $z \in E$ — деякий вектор.