Функціональний аналіз. Лекція 5

Василь Островський

Магістратура КАУ

2 квітня 2020 р.

Зміст попередніх лекцій

- Лінійні нормовані та банахові простори, повнота.
- Простори $L_p(R,\, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, їх повнота.

$$f \in L_p(R,\, d\mu) \iff \|f\|_p = \left(\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

- Нерівність Гельдера: $\forall f \in L_p(R,\, d\mu), g \in L_{p'}(R,\, d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, маємо $fg \in L_1(R,\, d\mu)$,

$$\int_R |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \le \|f\|_p \, \|g\|_{p'}.$$

- Нерівність Мінковського: $\forall f, g \in L_p(R,\, d\mu)$ маємо $f + g \in L_p(R,\, d\mu)$,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Вкладення просторів $L_p(R,\, d\mu)$

Твердження

Нехай $\mu(R) < \infty$. Якщо $p_1 < p_2$, то $L_{p_2}(R,\, d\mu) \subset L_{p_1}(R,\, d\mu)$

Доведення.

Нехай $f \in L_{p_2}(R,\, d\mu)$. Тоді для $q = p_2/p_1 > 1$

$$\infty > \|f\|_{p_2}^{p_2} = \int_R |f(x)|^{p_2}\, d\mu(x) = \int_R (|f(x)|^{p_1})^q\, d\mu(x),$$

отже, $|f(x)|^{p_1} \in L_q(R,\, d\mu)$, і за нерівністю Гельдера

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_R |f(x)|^{p_1} \cdot 1\, d\mu(x)$$

$$\leq \Big(\int_R |f(x)|^{p_1 q}\, d\mu(x)\Big)^{1/q} \Big(\int_R 1\, d\mu(x)\Big)^{1/q'} = \|f\|_{p_2}^{p_1}\, \mu(R)^{1/q'}. \ \square$$

Маємо нерівність $\|f\|_{p_1} \leq C\|f\|_{p_2}$, отже зі збіжності в $L_{p_2}(R,\, d\mu)$ випливає збіжність в $L_{p_1}(R,\, d\mu)$, $p_1 < p_2$.

Простори ℓ_p, $1 \leq p < \infty$

$\ell_p \ni x = (x_1, x_2, \dots) \iff \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty$ — банахів простір сумовних з p-м степенем послідовностей. Простір ℓ_p сепарабельний.

Вправа

Перевірити, що злічення множина фінітних послідовностей

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots), \quad x_j \in \mathbb{Q},\ j = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N},$$

є щільною в просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

З $x^j \to x$ в ℓ_p випливає покоординатна збіжність $x^j_m \to x_m$, $m \in \mathbb{N}$, але не навпаки: нехай $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots)$, тоді покоординатно $e_j \to 0$, але $\|e_j - e_k\|_p = 2^{1/p}$.

Вправа

Показати, що при $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ маємо $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$, причому зі збіжності в ℓ_{p_1} випливає збіжність в ℓ_{p_2}.

Простори $L_2(R, d\mu)$ та ℓ_2

Важливий випадок: $p = 2$. Для $f, g \in L_2(R, d\mu)$ з нерівності

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$$

(або з нерівності Гельдера) маємо $\int_R |f(x)g(x)|\, d\mu(x) < \infty$, тому визначений скінченний вираз

$$(f, g) = \int_R f(x)\,\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Вправа

Перевірити, що введена операція є скалярним добутком.

Таким чином, $L_2(R, d\mu)$ — гільбертів простір, і $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$. Аналогічно, простір квадратично сумовних послідовностей ℓ_2 є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j, \quad \|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}.$$

Істотно обмежені функції

Розглянемо простір з мірою $(R, \mathfrak{R}, \mu)$.

Означення

Вимірна функція f називається істотно обмеженою на R, якщо $\exists c > 0, A \in \mathfrak{R}$, для яких $\mu(A) = 0$ та

$$|f(x)| \leq c \quad \forall x \notin A.$$

Найменше з таких чисел c називають істотним супремумом f,

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{x \notin A} |f(x)|.$$

Також вживають термін "істотна верхня грань".

Простір $L_\infty(R, d\mu)$

Вправа

Сукупність усіх істотно обмежених функцій — лінійний простір, для якого

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|$$

є напівнормою, причому $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0 \mod \mu$,

Відповідний фактор-простір класів еквівалентності істотно обмежених функцій, що можуть відрізнятись на множині нульової міри, позначають $L_\infty(R, d\mu)$.

Вправа

Нехай $\mu(R) < \infty$. *Показати, що при* $1 \le p < \infty$ *маємо* $L_\infty(R, d\mu) \subset L_p(R, d\mu)$, $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

Теорема

Простір $L_\infty(R, d\mu)$ *повний.*

Доведення.

Нехай $(f_j)_{j=1}^\infty \subset L_\infty(R, d\mu)$ фундаментальна. Позначимо

$$A_n = \{x \in R \mid |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\},$$
$$A_{n,m} = \{x \in R \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Очевидно, $\mu(A_n) = \mu(A_{n,m}) = 0$, $m, n \ge 1$, тому для $A = \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n.m=1}^\infty A_{n,m}\right)$ також маємо $\mu(A) = 0$. Для $x \notin A$ послідовність $(f_j(x))_{j=1}^\infty$ фундаментальна, тому $\exists \lim_{j\to\infty} f_j(x) =: f(x)$. Оскільки $(f_j)_{j=1}^\infty$ фундаментальна в $L_\infty(R, d\mu)$, вона обмежена, тому $f \in L_\infty(R, d\mu)$.
Покажемо, що $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$, що $\forall j, k > N$ $\|f_j - f_k\|_\infty < \epsilon$, тому також

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \epsilon, \quad \forall x \notin A, \; j, k > N.$$

Переходячи до границі при $k \to \infty$, та враховуючи, що $\mu(A) = 0$, отримаємо $\|f_j - f\|_\infty \le \epsilon$. □

Простір ℓ_∞

Подібно до $1 \le p < \infty$, у випадку $R = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1$, простір $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, d\mu)$ реалізується як простір послідовностей

$$\ell_\infty \ni x = (x_1, x_2, \dots), \quad \|x\|_\infty = \sup_{j \ge 1} |x_j|.$$

З означення норми відразу видно, що послідовність x належить ℓ_∞ тоді і лише тоді, коли вона обмежена, а збіжність в ℓ_∞ — рівномірна покоординатна збіжність.

Оскільки ℓ_∞ — конкретний випадок простору $L_\infty(R, d\mu)$, він повний, тобто є банаховим простором.

Вправа

Перевірити, що при $1 \le p < \infty$ маємо $\ell_p \subset \ell_\infty$, причому вкладення є неперервним, тобто із збіжності в ℓ_p випливає збіжність в ℓ_∞.

На відміну від випадку скінченного p, простір ℓ_∞ несепарабельний. Справді, для довільних послідовностей x, y з 0 та 1 маємо $\|x - y\|_\infty = 1, x \ne y$, і множина таких послідовностей незлічення.

Теорема про майже ортогональний вектор

Теорема

Нехай E — л.н.п., $G \subset E$ — власний підпростір ($G \ne E$). Тоді $\forall \epsilon > 0\ \exists y_\epsilon \notin G$, $\|y_\epsilon\| = 1$, для якого $\|y_\epsilon - x\| > 1 - \epsilon, \quad \forall x \in G$.

Доведення.

Нехай $z \notin G$. Тоді, оскільки G замкнений, маємо $\delta = \rho(z, G) = \inf_{x \in G} \|z - x\| > 0$. За означенням inf, $\forall \eta > 0$ $\exists x_\eta \in X$, що

$$\delta \le \|z - x_\eta\| < \delta + \eta. \tag{1}$$

Виберемо η так, що $\eta/(\delta + \eta) = \epsilon$ та покажемо, що пронормований вектор $y_\epsilon = \frac{z - x_\eta}{\|z - x_\eta\|}$ задовольняє потрібні умови.

Маємо $\|y_\epsilon - x\| = \left\| \frac{z - x_\eta}{\|z - x_\eta\|} - x \right\| = \frac{\|z - (x_\eta + \|z - x_\eta\| x)\|}{\|z - x_\eta\|}$.

Оскільки $x_\eta + \|z - x_\eta\| x \in G$, з (1) та означення δ маємо

$$\|y_\epsilon - x\| > \frac{\delta}{\delta + \eta} = 1 - \frac{\eta}{\delta + \eta} = 1 - \epsilon. \qquad \square$$

Скінченновимірні простори

Надалі позначатимо $\mathbb{K}$ поле $\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$.
Нехай E — лінійний простір над $\mathbb{K}$. Вектори $x_1, \dots, x_n \in E$ лінійно незалежні $\iff$ для довільних $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Простір E *скінченновимірний*, $\dim E = n < \infty$, якщо у E існує n лінійно незалежних векторів, і не існує $n+1$ лінійно незалежних векторів.
Лінійно незалежна система $e_1, \dots, e_n$ лінійно незалежних векторів у n-вимірному просторі називається *базисом* простору E. Для кожного $x \in E$ існує однозначний розклад

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}.$$

Вправа

1. Перевірити існування та однозначність такого розкладу.

Ізоморфізм лінійних просторів

Означення

Лінійні простори E_1, E_2 алгебраїчно ізоморфні, якщо існує взаємно однозначне відображення $U\colon E_1 \to E_2$, яке зберігає лінійні операції (ізоморфізм).
Лінійні топологічні простори E_1 та E_2 ізоморфні, якщо U є гомеоморфізмом, тобто U та U^{-1} неперервні.
Ізоморфізм $U\colon E_1 \to E_2$ нормованих просторів ізометричний, якщо $\|x\|_{E_1} = \|Ux\|_{E_2}$, $x \in E_1$.

Лінійні нормовані простори E_1 та E_2 ізоморфні тоді і лише тоді, коли вони алгебраїчно ізоморфні, та $\exists c_1, c_2 > 0$, що $\forall x \in E_1$

$$c_1 \|x\|_{E_1} \le \|Ux\|_{E_2} \le c_2 \|x\|_{E_1}.$$

Доведення.

1. Якщо $x_j \to x$ в E_1, то

$$\|Ux_j - Ux\|_{E_2} = \|U(x_j - x)\|_{E_2} \le c_2 \|x_j - x\|_{E_1} \to 0.$$

2. Якщо $\forall j \ \exists \|x_j\|_{E_1} = 1\colon \|Ux_j\|_{E_2} > j$, то $\|\frac{1}{j} x_j\|_{E_1} \to 0$, але $\|U \frac{1}{j} x_j\|_{E_2} > 1 \not\to 0$.

Для U^{-1} твердження доводиться аналогічно. □

Ізоморфізм скінченновимірних просторів

Теорема

Скінченновимірні лінійні нормовані простори ізоморфні тоді і лише тоді, коли вони мають однакову розмірність.

Доведення

Необхідність. Алгебраїчно ізоморфні скінченновимірні простори мають однакову розмірність. Справді, нехай $\dim E_1 = n$, $\dim E_2 = m < n$, та $U\colon E_1 \to E_2$ ізоморфізм. Виберемо базис $e_1, \dots, e_n$ в E_1. Тоді вектори $Ue_1, \dots, Ue_n$ ненульові та утворюють лінійно залежну систему в E_2, отже, для них існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\lambda_1 Ue_1 + \dots + \lambda_n Ue_n = 0.$$

U^{-1} існує та зберігає лінійні операції, тому

$$U^{-1}(\lambda_1 Ue_1 + \dots + \lambda_n Ue_n) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0,$$

що суперечить лінійній незалежності елементів базису.

Достатність

Покажемо, що комплексний (дійсний випадок аналогічний) простір E, $\dim E = n$, ізоморфний простору $\mathbb{C}^n$ з нормою

$$\mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Нехай $e_1, \dots, e_n$ — базис в E, тоді

$$E \ni x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \mapsto (x_1, \dots, x_n) =: Ux \in \mathbb{C}^n$$

— алгебраїчний ізоморфізм. Покажемо, що це гомеоморфізм. За нерівністю Коші–Буняковського та аксіомами норми

$$\|x\|_E = \Big\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\Big\|_E \le \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\|_E \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_E^2\right)^{1/2}$$

$$\le c_1 \|Ux\|, \quad c_1 = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_E^2\right)^{1/2} > 0.$$

Достатність. Продовження.

Залишилось показати, що $\exists c_2 > 0$: $\|Ux\| \le c_2\|x\|_E$, $x \in E$, тобто $\|y\| \le c_2\|U^{-1}y\|_E$, $y \in \mathbb{C}^n$. Розглянемо функцію

$$\mathbb{C}^n \ni y \mapsto f(y) = \|U^{-1}y\|_E \in \mathbb{R}.$$

З доведеної нерівності $c_1\|y\| \ge \|U^{-1}y\|_E$ маємо $f(y) \le c_1\|y\|$, тобто f неперервна.
Розглянемо звуження f на одиничну сферу $y \in S_1(0)$. Оскільки $S_1(0)$ — компакт, f досягає свого мінімуму $\delta \ge 0$.
Якщо $\delta = 0$, то $\exists y \in S_1(0)$: $\|U^{-1}y\|_E = 0$, і $U^{-1}y = 0$, але тоді $y = UU^{-1}y = 0$, що суперечить $\|y\| = 1$.
Отже, $\delta > 0$, і для $\|y\| = 1$ маємо $1 \le \delta^{-1}f(y) = \delta^{-1}\|U^{-1}y\|_E$, а тому внаслідок однорідності норми, $\|y\| \le \delta^{-1}\|U^{-1}y\|_E$ для всіх $y \in \mathbb{C}^n$. □

Наслідок

Кожна обмежена множина скінченновимірного лінійного нормованого простору передкомпактна.

Передкомпактність одиничної кулі

Теорема

Одинична куля у лінійному нормованому просторі E передкомпактна тоді і лише тоді, коли $\dim E < \infty$.

Доведення.

Достатність випливає з того, що куля — обмежена множина.
Нехай E нескінченновимірний лінійний нормований простір.
Покажемо, що замкнена одинична куля $\overline{B_1(0)}$ не компактна.
Виберемо $E \ni x_1, \|x_1\| = 1$, та розглянемо підпростір $G_1 =$ з.л.о(x_1). За теоремо про майже ортогональний вектор $\exists x_2 \notin G_1, \|x_2\| = 1$, для якого $\|x_2 - x\| > 1/2$, $x \in G_1$, зокрема, $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Розглянемо підпростір $G_2 =$ з.л.о(x_1, x_2), для якого побудуємо $x_3 \notin G_2, \|x_3\| = 1$, та $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$. Аналогічно побудуємо цілу послідовність $x_j \in \overline{B_1(0)}$, $j \ge 1$, для якої $\|x_j - x_k\| > 1/2$, $j \ne k$. Очевидно, що з такої послідовності неможливо виділити фундаментальної підпослідовності, тобто $\overline{B_1(0)}$ — не компакт. □