Дистиляція квантових станів за допомогою стабілізаторних кодів виправлення похибок.

Лекція 14

23 травня 2023

Дистиляція квантових станів

Заплутані квантові стани є визначальною рисою квантової механіки. Збереження їх заплутаності на великих відстанях дозволяє робити те, що неможливо з точки зору класичної механіки.

По суті, вони є ресурсом в багатьох задачах квантової комунікації та обчислень.

Наприклад, двох-кубітні стани Бела

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

використовуються в квантовій телепортації.

Дистиляція квантових станів

Дистиляція квантових станів - це назва для алгоритмів, за якими по набору з n зашумлених копій заплутаного стану, можна отримати k, $k < n$, більш чистих копій цього заплутаного стану.

Існують різні методи дистиляції. Розберемо метод, який базується на виправленні квантових похибок стабілізаторними кодами.

Дистиляція станів Бела

Припустимо Аліса і Боб, що розділені дистанційно, хочуть розподілити між собою деяку кількість станів Бела.

Для цього Аліса генерує локально n копій станів Бела

$$\left|\Phi_n^+\right\rangle = \left|\Phi^+\right\rangle^{\otimes n} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)\Big)^{\otimes n}.$$

Другу частину кожного стану Аліса відправляє Бобу, тобто він отримає n кубітів. Вважаємо, що при передачі на стани Боба могла подіяти похибка $E = E_B$. Тобто результуючий стан буде

$$(I_A \otimes E_B)\left|\Phi_n^+\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle E_{B_1}|0\rangle + |1\rangle E_{B_1}|1\rangle) \otimes \cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle E_{B_n}|0\rangle + |1\rangle E_{B_n}|1\rangle),$$

якщо $E_B = E_{B_1} \otimes \cdots \otimes E_{B_n}$.

Дистиляція станів Бела

Зрозуміло, що для нетривіальної похибки E це вже не будуть n чистих станів Бела. Але це можна виправити.

Візьмемо стабілізаторний код $S = \langle g_1, \ldots, g_{n-k} \rangle$ типу $[n, k]$. Процедура дистиляції починається із застосуванням Алісою вимірювань, що відповідають генераторам g_i, до її n кубітів. Результатом буде набір $\mathbf{c} = c_1 \ldots c_{n-k}$ з $n - k$ значень ± 1, а стан усієї квантової системи перейде у

$$(P_{\mathbf{c}} \otimes I_B)(I_A \otimes E_B) \left|\Phi_n^+\right\rangle,$$

де

$$P_{\mathbf{c}} = \prod_{i=1}^{n-k} (I + c_i g_i)/2$$

це проєктор, що відповідає результату $\mathbf{c}$ при вимірюванні.

Дистиляція станів Бела

Для станів Бела виконується матрична тотожність

$$(M \otimes I_B)\left|\Phi_n^+\right\rangle = (I_A \otimes M^T)\left|\Phi_n^+\right\rangle$$

для будь-якої матриці M.

Тож попередній вираз можна переписати як

$$(P_{\mathbf{c}} \otimes I_B)(I_A \otimes E_B)\left|\Phi_n^+\right\rangle = (I_A \otimes E_B)(P_{\mathbf{c}} \otimes I_B)\left|\Phi_n^+\right\rangle =$$

$$= (I_A \otimes E_B)(I_A \otimes P_{\mathbf{c}}^T)\left|\Phi_n^+\right\rangle.$$

Іншими словами, можна вважати, що кубіти Боба були спроєктовані до $P_{\mathbf{c}}^T$, а потім на них подіяла похибка E_B.

При цьому Аліса відправляє результат **c** її вимірювань класичним чином, тож Боб в точності знає $P_{\mathbf{c}}^T$.

Дистиляція станів Бела

З точки зору Боба вимірювання Аліси з результатом **c** еквівалентно тому, що це він провів вимірювання g_i^T з результатом **c** (до похибки E_B).

Відмітимо, що $S^T = \langle g_1^T, \ldots, g_{n-k}^T \rangle$ так само буде стабілізаторним кодом типу $[n, k]$.
Вимірювання g_i^T з результатами c_i переведуть стан системи у стабілізаторний підпростір групи

$$\langle c_1 g_1^T, \ldots, c_{n-k} g_{n-k}^T \rangle,$$

а помилка E відповідно до

$$\langle c_1 E g_1^T E^\dagger, \ldots, c_{n-k} E g_{n-k}^T E^\dagger \rangle.$$

Дистиляція станів Бела

Так само як і при виправленні квантових похибок Боб може провести синдромні вимірювання, що відповідають g_i^T, щоб знайти і виправити похибку E (якщо E виправляється стабілізаторним кодом S^T). Тобто повернути стан у простір, що відповідає

$$\langle c_1 g_1^T, \dots, c_{n-k} g_{n-k}^T \rangle.$$

Єдине що в цьому алгоритмі по суті виправляється логічний стан k кубітів, які кодуються стабілізаторним кодом. Тож кажуть що цей алгоритм дистиляції дозволяє дистилювати k станів за допомогою n.