Корекція квантових похибок. Елементарні коди виправлення похибок.

Лекція 9

04 квітня 2023

Виправлення похибок

В класичних інформаційних технологіях використовуються методи відстеження та виправлення похибок, що можуть виникати при передачі чи обробці інформації.

Загальна ідея полягає у кодуванні інформації надлишковим чином, щоб при втраті частини інформації її все одно можна було б відновити.

Найпростішим прикладом класичного кодування є код повторення, де кожен біт повідомлення повторюється фіксовану кількість разів. Наприклад,

$$01101 \longrightarrow 000111111000111,$$

якщо кожен біт повторити тричі. При декодуванні, якщо була помилка передачі, то біт відновлюється за більшістю голосів, тобто $001 \longrightarrow 0$.

Виправлення квантових похибок

В квантовому випадку все набагато складніше, бо

- Кубіт може мати безліч станів, окрім двох базисних $|0\rangle, |1\rangle$
- З першого виплає, що можливих похибок також безліч
- Кубіт, що знаходиться у невідомому стані, неможливо клонувати
- Вимірювання кубіту знищує його початковий стан

Перед тим як перейти до квантових кодів розглянемо більш загальне поняття вимірювання квантової системи.

Проективні вимірювання квантових систем

Нехай є гільбертів простір H розмірності $\dim H = d$, та $|\phi\rangle \in H$ це стан на ньому.

Проективному вимірюванню стану на H відповідає **PVM** (projection valued measure) – розклад одиничного оператора I в суму ортогональних проекторів P_i, $P_i^2 = P_i^\dagger = P_i$:

$$I = P_1 + P_2 + \cdots + P_n.$$

Кожному такому проектору відповідає підпростір $H_i \subset H$, на який він проектує, тобто $H_i = \mathrm{Im} P_i$. Тож розкладу одиниці завжди буде відповідати розклад H в ортогональну пряму суму

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n.$$

Проективні вимірювання квантових систем

Результатом вимірювання стану $|\phi\rangle$ буде мітка i, де $i = 1, 2, \ldots, n$, з ймовірністю $p_i = |P_i |\phi\rangle|^2 = \langle\phi|P_i|\phi\rangle$.
При цьому система перейде у новий стан

$$\frac{P_i |\phi\rangle}{|P_i |\phi\rangle|}.$$

Неважко бачити, що вимірюванню фон Неймана по базису $\{|u_i\rangle\}_{i=1}^{d} \subset H$ відповідає PVM

$$I = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + \cdots + |u_d\rangle\langle u_d| .$$

Взагалі, будь-яке PVM можна розуміти як таке, де $P_i = \sum_j |u_{i_j}\rangle\langle u_{i_j}|$ для якогось базису $\{|u_{i_j}\rangle\} \subset H$.

Проективні вимірювання квантових систем

Вимірювання не базисного типу можуть бути корисни тим, що стан системи колапсує не на якийсь один вектор, а на підпростір з векторів. Тобто відбувається якби частковий колапс, але отриманої при вимірюванні інформації може бути достатньо.

Також зауважимо, що PVM часто кодують ермітовим оператором вигляду $O = \sum \lambda_i P_i$, де всі $\lambda_i \in \mathbb{R}$ різні.

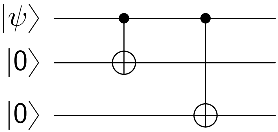
Для системи, що складається з двох частин, тобто $H = H_1 \otimes H_2$, PVM на одній з частин (наприклад, першій) відповідає PVM яка визначена на усій системі:

$$I_H = I_{H_1} \otimes I_{H_2} = P_1 \otimes I + P_2 \otimes I + \cdots + P_n \otimes I.$$

Трьох кубітний bit flip код

В цьому прикладі будемо вважати, що в каналі передачі кубітів єдина можлива похибка – це операція X, тобто стан кубіту $|\psi\rangle$ може перейти у стан $X|\psi\rangle$ з якоюсь ймовірністю p. Такий канал називають bit flip каналом.

Будь-який стан $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ можна закодувати як $|\Psi\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$ за допомогою наступної схеми:



Після проходження $|\Psi\rangle$ через bit flip канал до кожного з кубітів могла бути застосована операція X. Наприклад, якщо помилка сталася на першому кубіті, то результуючим станом буде $U_{\mathrm{err}}|\Psi\rangle = \alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$.

Трьох кубітний bit flip код

Виправлення похибок проходить у два етапи. На першому етапі проходить визначення конкретної похибки за допомогою так званого **синдромного вимірювання**.

На другому етапі проходить виправлення вже відомої похибки.

Трьох кубітний bit flip код

В якості синдромного вимірювання розглянемо PVM, що задана наступним чином:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111| \\
P_1 &= |100\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 011| \\
P_2 &= |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101| \\
P_3 &= |001\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 110|
\end{aligned}
$$

Якщо при вимірюванні ми отримали мітку 0, то це значить, що помилок не було і нічого виправляти не потрібно. Якщо отримали мітку i, $i = 1, 2, 3$, то значить сталася помилка на кубіті i.

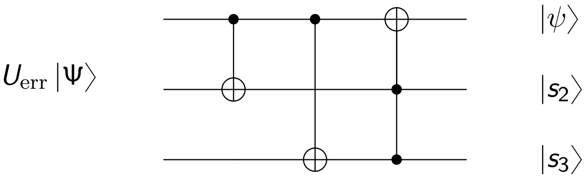
Для виправлення помилки застосовуємо X на кубіті i.

Для декодування стану $\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle$ просто застосовуємо обернену операцію до операції кодування.

Трьох кубітний bit flip код

Є також й інший шлях.

Синдромне вимірювання та декодування можна замінити однією схемою



Трьох кубітний bit flip код

Для стану $\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$ вимірювання, що відповідає

$$I = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

можна замінити на два послідовних вимірювання, що відповідають

$$I = (P_0 + P_3) + (P_1 + P_2),$$

$$I = (P_0 + P_2) + (P_1 + P_3).$$

Для елементу $|b_1 b_2 b_3\rangle$ стандартного базису, перше вимірювання відповідає перевірці умови, що перший та другий біт співпадають. Тож замість вимірювання давайте застосуємо операцію $CNOT_{1,2}$. В результаті матимемо

$$CNOT_{1,2}|b_1 b_2 b_3\rangle = |b_1\rangle|b_2 \oplus b_1\rangle|b_3\rangle.$$

Другий кубіт вийде $|0\rangle$, якщо $b_1 = b_2$, та $|1\rangle$ якщо $b_1 \neq b_2$.

Трьох кубітний bit flip код

Аналогічно, друге вимірювання відповідає перевірці умови, що перший та третій біт співпадають. Застосування $CNOT_{1,3}$ вже дасть $|b_1\rangle|b_2 \oplus b_1\rangle|b_3 \oplus b_1\rangle$. Третій кубіт вийде $|0\rangle$, якщо $b_1 = b_3$, та $|1\rangle$ якщо $b_1 \neq b_3$.

Виходить так, що

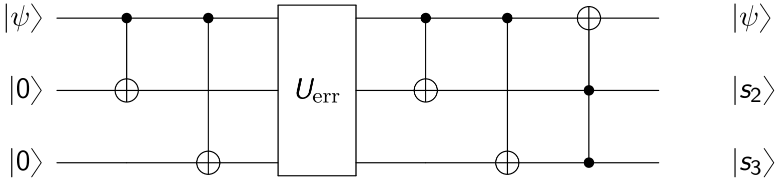
- $s_2 = 0, s_3 = 0$ відповідає випадку P_0,
- $s_2 = 0, s_3 = 1$ відповідає випадку P_3,
- $s_2 = 1, s_3 = 0$ відповідає випадку P_2,
- $s_2 = 1, s_3 = 1$ відповідає випадку P_1.

Тож застосувавши $C_{[2,3],1}(X)$ ми виправимо біт першого кубіту.

По лінійності така схема працює для будь-якого $U_{\mathrm{err}}|\Psi\rangle$.

Трьох кубітний bit flip код

Повна схема трьох кубітного bit flip коду виглядає як



Зауваження

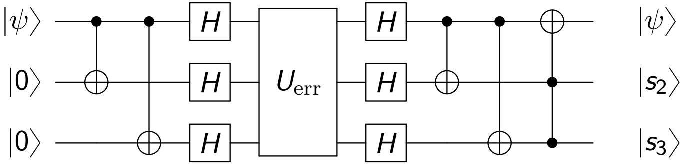
$$(P_0 + P_3) - (P_1 + P_2) = Z \otimes Z \otimes I = Z_1 Z_2,$$

$$(P_0 + P_2) - (P_1 + P_3) = I \otimes Z \otimes Z = Z_2 Z_3.$$

Трьох кубітний phase flip код

Припустимо тепер, що в каналі передачі може відбуватися так звана phase flip помилка, тобто кубіт $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ може перейти у $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ з якоюсь ймовірністю p. Іншими словами, на кубіт може подіяти операція Z.

Для того, щоб побудувати код виправлення такої помилки згадаємо, що $HZH = X$. Тож ми можемо цю задачу звести до попередньої, якщо перед дією каналу з похибкою та після неї поставимо операцію $H^{\otimes 3}$. Загальна схема буде виглядати як



9-кубітний код Шора

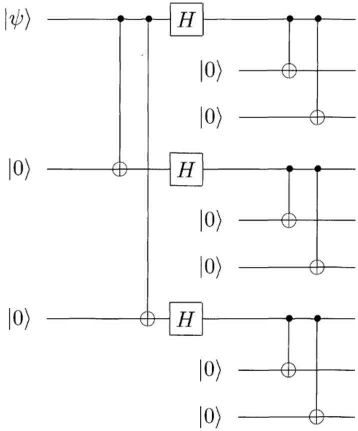
Два попередніх коди можна об'єднати в один код. Причому об'єднаний код зможе виправляти будь-яку однокубітну похибку.

Для цього ми використовуємо конкатенацію двох кодів – спочатку кодуємо як у phase flip, тобто $|0\rangle \to |+++\rangle$, $|1\rangle \to |---\rangle$. Далі кожен з трьох кубітів кодуємо як у bit flip, тобто $|+\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$, $|-\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$. Загалом, отримаємо

$$|0\rangle \to \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle),$$

$$|1\rangle \to \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle).$$

Схему кодування можна зобразити як



9-кубітний код Шора

Як і раніше, тут в нас є два шляхи – або використовувати синдромні вимірювання та робити виправлення на їх основі, або використовувати єдину схему, яка (майже) еквівалентна.

Оскільки кодування це конкатенація, то і синдромне вимірювання є послідовним застосуванням синдромних вимірювань, що відповідають обом кодам.

9-кубітний код Шора

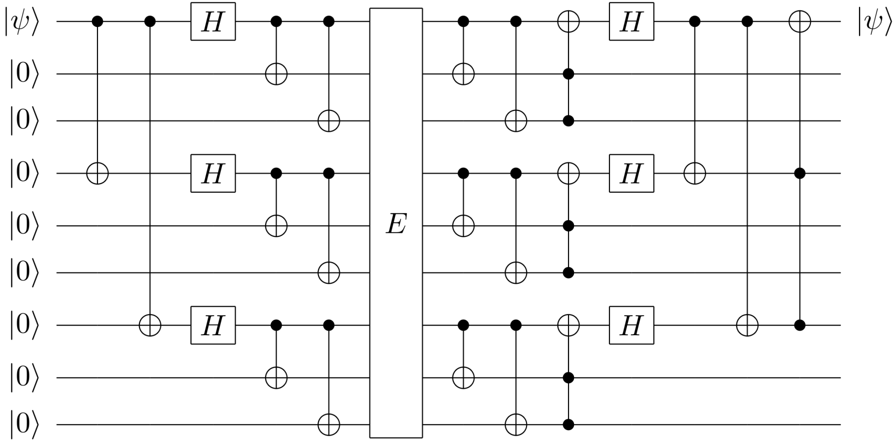
А саме, спочатку для кожної з груп кубітів $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ проводимо синдромне вимірювання як у bit flip коді. Цим ми визначемо, чи була X помилка десь на цих 9-ти кубітах. Після її знаходження виправляємо її.

Далі, зауважимо, що phase flip (тобто Z помилка) на одному кубіті з групи подіє як $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \mp |111\rangle)$ на усю групу. Тож відрізнити Z_1 від Z_2 не вийде. Але нам це і не потрібно.

Ми можемо взяти по одному кубіту з кожної групи, наприклад $1,4,7$, і провести синдромне вимірювання для phase flip коду. Цим визначимо групу, в якій була Z помилка. Для її виправлення достатньо застосувати Z до якогось кубіту з цієї групи.

9-кубітний код Шора

Інший шлях – це використати відповідну конкатенацію схем, що виправляють похибку для обох кодів.
Вона буде виглядати як



9-кубітний код Шора

Насправді, квантова схема для цього коду виправляє будь-яку однокубітну помилку, а не тільки X чи Z. Розберемо, чому це так.

Очевидно, що якщо сталася помилка $XZ = -iY$, то її також буде виправлено. Будь-який однокубітний унітарний оператор U можна розкласти в суму

$$U = \alpha_0 I + \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z =$$

$$= \alpha_0 I + \alpha_1 X + \alpha_2 iXZ + \alpha_3 Z.$$

Далі працює найкраща властивість квантової теорії – її лінійність.

Завдання

1. Перевірити, що для синдромного PVM у bit flip коді

$$(P_0 + P_3) - (P_1 + P_2) = Z \otimes Z \otimes I,$$

$$(P_0 + P_2) - (P_1 + P_3) = I \otimes Z \otimes Z.$$

2. Нехай стан $|\psi\rangle = |0\rangle$, і він закодований по 9-ти кубітному коду Шора. І нехай сталася помилка XZ на 5-му кубіті (другому у другій групі). Порахувати стан 9-ти кубітної системи в кінці схеми корекції помилки.