Постулати квантової механіки. Кубіт. Сфера Блоха.

Лекція 2

14 лютого 2023

Постулати квантової механіки.

Постулат 1. Квантовій фізичній системі можна поставити у відповідість комплексний гільбертів простір H. Станами системи є вектори $|v\rangle \in H$ одничної довжини, тобто $\langle v|v\rangle = 1$. При цьому вектори, які відрізняються *глобальною фазою* $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, тобто $|u\rangle = e^{i\theta}|v\rangle$, вважаються еквівалентними станами (їх неможливо розрізнити фізично), $|u\rangle \sim |v\rangle$.

Найпростішим прикладом є *кубіт* — система розмірності 2, $H = \mathbb{C}^2$. Станами є вектори $|v\rangle = a_0\,|0\rangle + a_1\,|1\rangle$, $a_i \in \mathbb{C}$, $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Числа a_i називають *амплітудами*.

Кажуть, що стан $|v\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ знаходиться у *суперпозиції* відносно стандартного базису, якщо він не еквівалентний до базисного стану, тобто $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$. При цьому відносна фаза вже грає роль.
Наприклад, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ та $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)$ це вже різні стани, якщо $e^{i\theta} \neq 1$.

Постулати квантової механіки.

Постулат 2. Вимірювання стану системи.
Нехай $\{|b_0\rangle, \ldots, |b_{d-1}\rangle\}$ це ортонормований базис $H = \mathbb{C}^d$. Вимірюванню фон Неймана відповідає набір ортопроекторів $P_i = |b_i\rangle\langle b_i|$,

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{d-1} = I.$$

Результатом вимірювання стану $|v\rangle \in H$ буде індекс i з ймовірністю $p_i = \mathrm{Tr}(P_i|v\rangle\langle v|) = |\langle b_i|v\rangle|^2$. При цьому система переходить у новий стан $P_i\,|v\rangle/\sqrt{p_i} \sim |b_i\rangle$.

Для кубіту прикладом є вимірювання $|v\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ у стандартному базисі. Результатом вимірювання буде 0 з ймовірністю $|a_0|^2$ (при цьому система перейде у стан $|0\rangle$), та 1 з ймовірністю $|a_1|^2$ (при цьому система перейде у стан $|1\rangle$).

Постулат 3. Унітарні перетворення станів.
Фізично стан замкненої квантової системи проходить детерміновану унітарну еволюцію в часі, що описується рівнянням Шредінгера.
В квантових обчисленнях та інформації вважається, що це контрольований процес. Тож вважається, що на стан $|v\rangle \in H$ ми можемо подіяти будь-яким унітарним перетворенням U щоб перевести систему у стан $U|v\rangle$, а сам по собі він не змінюється (якщо не вимірюється).

Процес вимірювання, що відповідає базису $\{|b_0\rangle, \ldots, |b_{d-1}\rangle\}$, застосований до стану $|v\rangle$, еквівалентний до вимірювання стану $U^\dagger |v\rangle$ у стандартному базисі, із застосуванням U до кінцевого стану, де $U|i\rangle = |b_i\rangle$, $\forall i$ (тобто $U = \sum_i |b_i\rangle\langle i|$).

Постулат 4. Композиції квантових систем.
Якщо є дві квантові системи, яким відповідають гільбертові простори H_1 та H_2, то сукупній системі відповідає гільбертів простір $H_1 \otimes H_2$. При цьому якщо перша система перебуває у стані $|v_1\rangle \in H_1$, а друга у стані $|v_2\rangle \in H_2$, то сукупна система перебуває у стані $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \in H_1 \otimes H_2$.

Але сукупна система може перебувати і в станах, які не можна виразити як $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$, а лише як їх лінійні комбінації (суперпозиції). Такі стани називають *заплутаними*.

Унітарні перетворення кубіту.

Матриці Паулі, задовольняють $X^2 = Y^2 = Z^2 = -iXYZ = I$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці повороту відносно x,y та z:

$$R_x(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)X = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Y = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Матриця Адамара H та *фазові зсуви* S та T:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Унітарні перетворення кубіту.

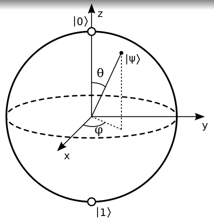
Будь-яку унітарну матрицю $U \in L(H)$ можна зобразити як $U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, де $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Звідси можна отримати наступний загальний вигляд

$$U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} e^{-i\beta - i\delta}\cos(\gamma/2) & -e^{-i\beta + i\delta}\sin(\gamma/2) \\ e^{i\beta - i\delta}\sin(\gamma/2) & e^{i\beta + i\delta}\cos(\gamma/2) \end{pmatrix}.$$

Тож будь-яку унітарну матрицю можна записати як

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta).$$

Сфера Блоха.



Кожний чистий стан кубіту можна задати вектором

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle,$$

де $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Це можна зобразити як точку з координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

на дійсній трьохвимірній одиничній сфері з центром у $(0, 0, 0)$. Зокрема, $|0\rangle$ це точка $(0, 0, 1)$, а $|1\rangle$ це точка $(0, 0, -1)$. Інтерактивна сфера Блоха – `https://javafxpert.github.io/grok-bloch/`

Сфера Блоха.

Також цей же зв'язок можна записати як

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(I + a_x X + a_y Y + a_z Z).$$

Звідси можна отримати, що

$$a_x = \langle\psi|X|\psi\rangle, \quad a_y = \langle\psi|Y|\psi\rangle, \quad a_z = \langle\psi|Z|\psi\rangle,$$

де використано циклічність сліду $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|X) = \langle\psi|X|\psi\rangle$.

Дія гейту $R_z(\gamma)$ на $|\psi\rangle$ відповідає повороту на сфері Блоха навколо осі z на кут γ проти годинникової стрілки. Аналогічно для гейтів $R_x(\gamma)$ та $R_y(\gamma)$.

Це по суті задає ізоморфізм між поворотами в $\mathbb{R}^3$ та унітарними однокубітними гейтами:

$$SO(3) \cong SU(2)/\langle -I\rangle$$

Скінченна множина G однокубітних гейтів називається *універсальною*, якщо будь-який унітарний гейт можна отримати як добуток скінченної кількості елементів з G.
Наприклад, усі повороти $\{R_y(\theta), R_z(\theta)\}$ є універсальною множиною.

Скінченна множина G однокубітних гейтів називається *апроксимативно універсальною*, якщо будь-який унітарний гейт можна як завгодно точно наблизити добутком скінченної кількості елементів з G.
Наприклад, пара гейтів $\{H, T\}$ є апроксимативно універсальною.

Будь-яка пара поворотів U, V відносно різних осей, і така, що UV є ірраціональним поворотом, є апроксимативно універсальною.

Теорема Соловея-Китаєва про кількість гейтів потрібних для апроксимації будь-якого однокубітного гейту.

Нехай є скінченна множина $G = \{U_1, U_2, ..., U_n, U_1^{-1}, U_2^{-1}, ..., U_n^{-1}\} \in SU(2)$, унітарних матриць з $\det(U_i) = 1$ (разом з оберненими). І нехай група $\langle G \rangle$, що ними породжена, є щільною в $SU(2)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує константа $c > 0$ така, що $\forall U \in SU(2)$ існуює послідовність елементів із G довжини $O(log^c(1/\varepsilon))$ така, що для їх добутку S виконується $||S - U|| \leqslant \varepsilon$.

Завдання

1. $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle - i|1\rangle)$. Вимірюємо у базисі $|+\rangle, |-\rangle$. Знайти ймовірності $+, -$.

2. $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle + 2i|1\rangle)$. Знайти (a_x, a_y, a_z) на сфері Блоха.

3. $|v\rangle = R_y(\pi/2)|-\rangle$. Знайти (a_x, a_y, a_z) на сфері Блоха.