49 Это фр-е, по сути и есть $\operatorname{Im}\sigma(\omega) = \frac{\rho_s e^2}{m\,\omega}$

$$j = \sigma(\omega)E(\omega), \qquad E(\omega) \sim \frac{1}{c} i A\cdot\omega$$

$$\vec{j} = -\frac{\rho_s e^2}{mc}\vec{A}.$$

Продольная проводимость неупорядоченного электронного газа (конкретный расчёт).

Хотя мы уже рассмотрели выражение

$$\operatorname{Re}\sigma(\omega) = -\frac{1}{V}\frac{\operatorname{Im}\Pi(\vec{p}=0,\omega)}{\omega}, \text{ но}$$

при этом мы использовали то, что

$-\langle\tau\rangle = \operatorname{Re}\Pi(\vec{p}=0,\omega\to 0)$, кот. пришлось принять на веру.

Поэтому, давайте вернёмся на шаг назад и стартуем снова с

$$\sigma(\omega) = -i\,\frac{K_{ii}(\vec{p}=0,\omega)}{V(\omega+i0)}, \text{ где мы будем}$$

использовать K, кот. мы уже ввели

$$K_{ii}(x,x') = -\frac{e^2}{m}\delta(x-x')\delta_{ii}\langle\hat{n}(x)\rangle + \langle \hat{j}^p_k(x)\hat{j}^p_k(x')\rangle.$$

Но только нам уже нужно фурье-преобразование K, кот. делается с учётом того, что K зависит от $x-x'$:

$$K_{ii}(\vec{p}, i\Omega_m) = -\frac{e^2}{m}\langle\langle n\rangle\rangle_V + \langle\langle \hat{j}^p_i(\vec{p})\,\hat{j}^p_i(-\vec{p})\rangle\rangle_V. \quad (*)$$

Здесь $K(i\omega_n)$, т.е. ещё до аналитического продолжения, $1/V$, в отличие от Altland, я включил в определение $\sigma(\omega)$, а $\langle\langle\ \rangle\rangle$ означает, что усреднение идёт по квантовому тепловому распределению и по потенциалу примесей. С примесями мы ещё не работали, детальнее рассмотрим дальше.

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

А сейчас вернёмся и обсудим какой рез-т

$$\frac{K(\vec{q}, i\Omega_m)}{V} = -\frac{2Te^2}{V} \sum_{n,\vec{p},\vec{p}'} \left(\frac{\delta_{\vec{p},\vec{p}'}}{m} \langle G_{n,\vec{p},\vec{p}'} \rangle_V + \right. \qquad (*)$$

$V = L^d$, где d – размерность пр-ва;
множитель „2" из-за суммы по спинам
(гамильтониан считается не зависящим от спина)

$$\left. + \frac{1}{(2m)^2} (2p+q)_i (2p'+q)_i \langle G_{n+m,\vec{p}+\vec{q},\vec{p}'} \; G_{n,\vec{p},\vec{p}'-\vec{q}} \right.$$

$G_{n,\vec{p},\vec{p}'} \equiv \langle \psi_n(\vec{p}) \bar{\psi}_n(\vec{p}') \rangle$ – температурная ф-я Грина для конкретной реализации примесного беспорядка.

Вы знаете, что в отсутствие беспорядка ф-р зависит от одного импульса, так как есть трансляц. инвариантность. Для конкретной реализации беспорядка она нарушена, но восстанавливается после фактического усреднения по беспорядку: $\langle \; \rangle_V$.

Сделаем теперь сомнительное и, в общем случае неверное, предположение

! $\langle GG \rangle_V = \langle G \rangle_V \langle G \rangle_V$.

Также мы используем то, что усредненная по распределениям примесей ф-р

$$\langle G_{n,\vec{p},\vec{p}'} \rangle = \delta_{\vec{p},\vec{p}'} G_p \equiv \frac{\delta_{\vec{p},\vec{p}'}}{i\omega_n - \xi_{\vec{p}} + \frac{i}{2\tau}\,\mathrm{sgn}\,\omega_n},$$

$p = (i\omega_n, \vec{p})$,

где τ – среднее время рассеяния на примесях, т.е. время через кот. частица с начальным импульсом $\vec{p}$ рассеивается в сост. с другим импульсом.

Подставив в $(*)$ получаем

$$\frac{K(\vec{q}, i\Omega_m)}{V} = -\frac{2e^2T}{V} \sum_{p} \left(\frac{1}{m} G_p + \frac{1}{(2m)^2} (2p+q)_i^2 \, G_{p+q} G_p \right).$$

Из-за присутствия $\operatorname{sgn}\omega_n$ в ФГ так просто с пом. мацубаровских сумм это выражение не вычислить и нужно интегр. по контурам.

В самом деле, если рассмотреть ФГ в комплексной плоскости

$$G_p = G_{\vec{p}}(z) = \frac{1}{z - \xi_{\vec{p}} + \frac{i}{2\tau}\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z}, \text{ то}$$

видно, что она имеет разрез вдоль действит. оси, $\operatorname{Im} z = 0$. Произведение

$G_{\vec{p}}(z) G_{\vec{p}+\vec{q}}(z + i\omega_n)$ имеет разрезы вдоль

$\operatorname{Im} z = 0$ и $\operatorname{Im}(z + i\omega_n) = 0$.

Напомню как обычно выполнялось суммирование по мацубаровским частотам.

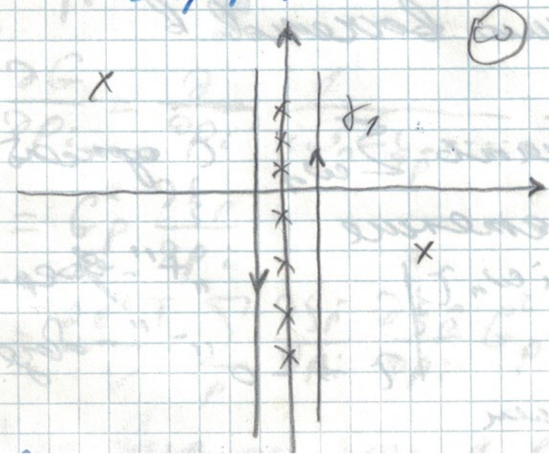
Пусть есть некая ф-я $h(\omega_n)$, где ω_n - бозонная либо фермионная частота и нам необходимо вычислить

$$S \equiv \sum_n h(\omega_n).$$

Основная идея - ввести комплексную вспомогательную ф-ю $g(z)$, кот. имеет полюса $z = i\omega_n$. Тогда сумма S возникает как сумма вычетов, полученных интегрированием произведения gh вдоль правильно выбранного контура в комплексной плоскости.

Обычно

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\exp(\beta z) - 1} & \text{- бозоны,} \\ \dfrac{\beta}{\exp(\beta z) + 1} & \text{- фермионы.} \end{cases} \quad \text{или} \quad g(z) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{2}\operatorname{cth}\dfrac{\beta z}{2} & \text{- бозоны} \\ \dfrac{\beta}{2}\operatorname{th}\dfrac{\beta z}{2} & \text{- фермионы} \end{cases}$$



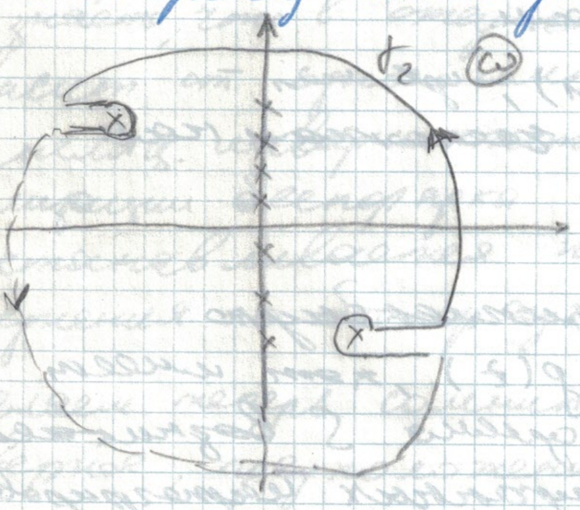
Проинтегрируем по конт. γ_1 такую ф-ю

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dz\, g(z)\, h(-iz) = \zeta \sum_n \mathrm{res}\left[g(z)\, h(-iz)\right]\Big|_{z=i\omega_n} =$$

Напомню, $\zeta = 1$ – бозоны, $\zeta = -1$ – фермионы.

$= \Bigg|$ „Считающие" ф-и из левой колонки имеют вычет $= \zeta$ и предполагается, что контур замыкается на $\pm\infty$ $\Bigg| = \sum_n h(\omega_n) = S$

Если мы не пересекаем сингулярности $g(z)$ или же ф-ии $h(-iz)$, то мы можем деформировать контур γ_1 до контура γ_2, по которому нам уже легко интегрировать.



Если h убывает быстрее z^{-1} при $|z|\to\infty$, то можно попытаться раздуть контур до бесконечно большой окружности.

Тогда, в простейшем случае, в него попадут изолированные сингулярности ф-и $h(-iz)$ в точках z_k. Получим

$$S = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dz\, h(-iz)\, g(z) = -\zeta \sum_k \mathrm{res}\left[h(-iz)\, g(z)\right]\Big|_{z=z_k}.$$

20.12 → $\sum_n h(\omega_n) =$

и задача свелась к нахождению вычетов в нескольких полюсах.

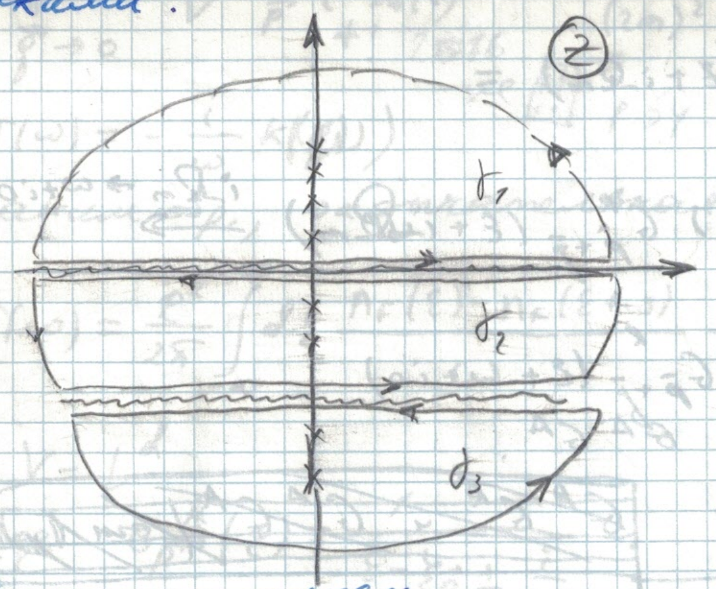
Вопрос! Умеете ли вы считать $\sum_{i\omega_n}$ с одной ф-ей? Я имею в виду выражение

$$n = \pm T \sum_n \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d}\, G(i\omega_n, \vec{p})\, e^{-i\omega_n \tau}\Big|_{\tau\to -0}$$

„+" – ферм.
„−" – бозе.

Посмотрите Altland p. 173 или

У нас разрезы, поэтому контуры будут такими:



Итак, мы имеем

$$\sum_n G_p G_{p+q} = -\frac{\beta}{2\pi i} \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} dz\, n_F(z)\, G_{\vec{p}}(z)\, G_{\vec{p}+\vec{q}}(z + i\Omega_m) .$$

Теперь преобразуем диамагнитный член.

$$K_{diam} \equiv -\langle \tau \rangle \Rightarrow$$

$$\frac{K_{diam}}{V} = -\frac{\langle \tau \rangle}{V} = -\frac{2e^2 T}{V} \sum_p \frac{1}{m} G_p$$

Можем даже записать не только для ξ-ия дисперсии $\xi_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu$, но и для произвольного $\xi_{\vec{p}}$

$$\frac{1}{m} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi_{\vec{p}}}{\partial p_i \partial p_i}, \text{ т. е.}$$

Интегрир. по частям

$$\frac{K_{diam}}{V} = -\frac{2e^2 T}{V} \sum_p \frac{\partial^2 \xi_p}{\partial p_i^2} G_p = -\frac{2e^2 T}{V} \left(\sum_n \frac{\partial \xi_p}{\partial p_i} G_p - \sum_{\vec{p}} \frac{\partial \xi}{\partial p_i} \frac{\partial G_p}{\partial p_i} \right) = *$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\vec{p}} \ldots} = -\frac{1}{(i\omega_n - \xi_{\vec{p}} - \ldots)^2} \left(-\frac{\partial \xi}{\partial p_i} \right) =$$

$$= G_p^2 \frac{\partial \xi_{\vec{p}}}{\partial p_i}$$

$$* = \frac{2e^2 T}{V} \sum_p \frac{\partial \xi_{\vec{p}}}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_{\vec{p}}}{\partial p_i} G_p^2 .$$

Как видите это и есть $\Pi(\vec{q} = 0, i\Omega_m = 0)/V$

55

Рассмотрим вклад по γ_1 контуру:

$$\frac{\beta}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dz\, n_F(z)\, G_{\vec p}(z)\, G_{\vec p+\vec q}(z+i\Omega_m) =$$

$$= \frac{\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\, G^R_{\vec p}(\varepsilon+i0)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i\Omega_m) \xrightarrow{i\Omega_m \to \omega+i0}$$

$$\frac{\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\, G^R_{\vec p}(\varepsilon+i0)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+\omega+i0).$$

Аналогично γ^3 с $G^A G^A$.

При $\Omega_m = 0$ вклады ~~$G^R G^R$ и $G^A G^A$ (от γ_s)~~ ~~сократятся, если~~

от $\Pi(i\Omega_m)$ ~~td~~ $-\langle\tau\rangle$ сократятся. Останутся члены разложения по ω (от $\Pi(\omega)-\Pi(0)$). При этом вклады от $\gamma_1 - G^R G^R$ и $\gamma^3 - G^A G^A$ зануляются, что можно проверить замкнув контур интегрирования там где нет полюсов. Для $G^R G^R$ — верхняя полупл., а для $G^A G^A$ — в нижней. Вклад диам. члена тоже имеет ту же структ. полюс.

Остался вклад от контура γ_2:

$$\frac{\beta}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dz\, n_F(z)\, G_{\vec p}(z)\, G_{\vec p+\vec q}(z+i\Omega_m) =$$

$$= \frac{\beta}{2\pi i}\int_{+\infty}^{-\infty} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\, G_{\vec p}(\varepsilon-i0)\, G_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i\Omega_m) +$$

по линии $z=-i\Omega_m$

$$+ \frac{\beta}{2\pi i}\int_{-\infty-i\Omega_m}^{+\infty-i\Omega_m} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\, G_{\vec p}(\varepsilon)\, G_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i\Omega_m) =$$

$\varepsilon \to \varepsilon - i\Omega_m$ $\qquad n_F(\varepsilon+i\Omega_m) = n_F(\varepsilon)$

$$= \frac{\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\left[-G_{\vec p}(\varepsilon-i0)\, G_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i\Omega_m) + G_{\vec p}(\varepsilon-i\Omega_m)\, G_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i0)\right]$$

$$\xrightarrow{i\Omega_m \to \omega+i0} \frac{\beta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, n_F(\varepsilon)\left[-G^A_{\vec p}(\varepsilon-i0)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i0+\omega) + G^A_{\vec p}(\varepsilon-i0-\omega)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i0)\right] =$$

$\varepsilon \to \varepsilon+\omega$

$$= -\frac{\beta}{2\pi i}\int^{\infty} d\varepsilon\left[n_F(\varepsilon)-n_F(\varepsilon+\omega)\right] G^A_{\vec p}(\varepsilon-i0)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon+i0+\omega),$$

• $K(\vec q) = -\frac{2\pi e^2}{V}\sum_{\vec p}\left(+\frac{B}{2\pi i}\right)\frac{(2p_i)^2}{(2m)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\,[n_F(\varepsilon)-n_F(\varepsilon+\omega)] \times$
$\vec q \to 0$ +! 2016
see $\boxed{!!}$ p.54
$\times\, G^A_{\vec p}(\varepsilon - i0)\, G^R_{\vec p+\vec q}(\varepsilon + i0 + \omega)$

$\sigma(\omega) = -\frac{i}{\omega} K(\omega))$

Таким обр., окончательная формула,

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \frac{n_F(\varepsilon)-n_F(\varepsilon+\omega)}{\omega}\, \frac{2}{Vm^2}\sum_{\vec p} p_i^2\, G^A_{\vec p}(\varepsilon)\, G^R_{\vec p}(\varepsilon+\omega), \quad (*)$$

$V = L^d$

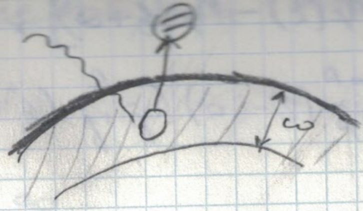
где $G^{R}_{\vec p\,A}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \xi_{\vec p} \pm \frac{i}{2\tau}}$. $\quad G^R_A \equiv G^{\pm}$.

Следует отметить, что приближение $\langle GG\rangle_V = \langle G\rangle_V \langle G\rangle_V$ привело к тому, что $\frac{1}{2\tau}$, кот. входит в ф-р войдет и в наш окончательный ответ. На самом деле, это неправильно, и в $\sigma(\omega)$ особенно в $\sigma_{dc}(\omega=0)$ входит не $1/\tau$, а не $1/\tau_{tr}$, где τ_{tr} – так наз. транспортное время. Это легко получается в подходе с ур-ем Больцмана, но в нашем подходе нужно рассматр. вершинную ф.

$$\frac{1}{\tau} \to \frac{1}{\tau_{tr}} = 2\pi n_i\, \overline{N(0)(1-\cos\theta)|u(\theta)|}^2.$$

n_i – концентрация примесей, $u(\theta)$ – потенциал взаимод. с примесями, $N(0)$ – плотность сост. на пов. Ферми. Основное отличие между τ и τ_{tr} в $(1-\cos\theta)$ – факторе, кот. учитывает то, что рассеяние на малые углы не мешает проводить ток.

Ну а теперь вернёмся к анализу нашего рез-та (*).
Переменное поле частоты ω создаёт элект.-дыр. пары с энергией ω. Фазовый объём, доступный для этих процессов, определяется ε-интегралом с $n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon+\omega)$, т.е. статист. Ферми требует, чтобы энергия вход. электрона



Динамика возбуждённого электрона описывается $G^R(\varepsilon+\omega)$, а дырки — $G^A(\varepsilon)$.
Вспомним что G^A описывает электрон движущийся назад во времени, т.е. дырку движ. вперёд во времени. Факторы p_i/m отражают то, что транспорт тока определяется скоростями.

Для радиально симметричной ф-и:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d p\, p_i^2 F(\xi_{\vec p}) = \frac{1}{d}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} p^2 F(\xi_{\vec p}) = \left| \begin{array}{l} \xi_{\vec p} = \frac{p^2}{2m}-\mu \\ p^2 = 2m(\xi+\mu)\end{array}\right|$$

$$= \frac{2m}{d}\int_{-\mu}^{\infty} d\xi\,(\xi+\mu)\,\nu(\xi)\,F(\xi),$$

$\nu(\xi)$ — DOS на один спин, так как сумму по спинам мы уже учли, $\nu(\varepsilon) = \frac{1}{V}\sum_{\vec p} \delta(\varepsilon-\xi_{\vec p})$

$$\frac{2}{L^d}\sum_{\vec p} p_i^2 G^A_{\vec p}(\varepsilon) G^R_{\vec p}(\varepsilon+\omega) = \frac{4m}{d}\int_{-\mu}^{\infty} d\xi\,(\xi+\mu)\,\nu(\xi)\, G^A(\varepsilon)G^R(\varepsilon+\omega)$$

$\simeq \left|\begin{array}{l}\text{ф-и имеют пики} \\ \text{на масштабе} \\ \tau^{-1} \ll \mu \text{ при } \xi=0\end{array}\right| \simeq \frac{4m\nu(0)\mu}{d}\int_{-\infty}^{\infty} G^A(\varepsilon)G^R(\varepsilon+\omega)\,d\xi =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \frac{1}{\varepsilon-\xi-\frac{i}{2\tau}}\cdot\frac{1}{\varepsilon+\omega-\xi+\frac{i}{2\tau}} =$$ | Замыкаем контур сверху. Тогда полюс при $\xi=\varepsilon+\omega+\frac{i}{2\tau}$.

$$= 2\pi i\, \mathrm{res}\left[\frac{1}{(\varepsilon-\xi-\frac{i}{2\tau})(\varepsilon+\omega-\xi+\frac{i}{2\tau})}\right]_{\xi=\varepsilon+\omega+\frac{i}{2\tau}} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{-\omega-\frac{i}{\tau}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\tau}-i\omega}.$$

$$* = \frac{4m}{\ }\,\frac{\mu}{d}\,\frac{n d}{4\mu}\,\frac{2\pi}{\frac{1}{\tau}-i\omega} = \frac{n\cdot m}{\ }\,\frac{2\pi}{\frac{1}{\tau}-i\omega}.$$

Есть такое соотношение (Enz стр. 107-108).

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_{T\sim 0} = 2N(\mu)$$ (для металлов). Это соответств. $\nu(0)$.

$$n(\mu, T=0) = 2\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\,\Theta\left(\epsilon_F - \frac{\hbar^2 p^2}{2m}\right) =$$

$$= \frac{2\Omega_d}{(2\pi)^d\, d}\left(\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2}\right)^{d/2},$$ где

было 1 Rybalko.

Ω_d — площадь пов. единичной сферы в пр-ве размерности d: $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 2\pi$, $\Omega_3 = 4\pi$.

$$\nu(0) = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d\, d}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2}\frac{d}{2}\,\epsilon_F^{d/2-1} =$$

$$= \frac{d}{4\epsilon_F}\,\frac{2\Omega_d}{(2\pi)^d\, d}\left(\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2}\right)^{d/2} = \frac{nd}{4\epsilon_F}.$$

$2\to 3$

$$S_n(R) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}R^n$$

Далее, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon\,\frac{n_F(\epsilon) - n_F(\epsilon+\omega)}{\omega} \simeq 1.$

Собираем всё вместе:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{2\pi}\frac{1}{m^2}\,n\cdot m\,\frac{2\pi}{\frac{1}{\tau} - i\omega} = \frac{ne^2}{m}\,\frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega},$$

то что мы ожидали. Но помните о $1/\tau \to \frac{1}{\tau_{tr}}$.

Надплинна густина як лінійний відгук.

В отличии от плотности конденсата, сверхтекучую плотность следует рассматривать как транспортный коэффициент. Предположим, что мы двигаем систему с инфинитезимально малой скоростью $\delta\vec{v}(\vec{x},t)$, которая включается и выключается адиабатически:

$$\delta\vec{v}(\vec{x},t) \to 0, \quad |t| \to \infty.$$

Линейный отклик измеряется изменением плотности импульса (удельным импульсом) $\vec{g}$ системы. Для фурье-компонент имеем