$$\chi_{nn}(\vec q,\vec q\,',\omega) = \frac{1}{L^d}\chi_{n_{\vec q}\,n_{-\vec q}}(\omega),$$

$$\hat n_{\vec q} = \sum_i e^{-i\vec q\vec r_i}.$$

Відповідна формула для д-ї відгуку парамагнітних струмів:

$$\chi_{jp_i\,jp_j}(\vec q,\vec q\,',\omega) = \frac{1}{L^d}\chi_{jp_{\vec q}i\,jp_{-\vec q}j}(\omega).$$

Відгук для повного фізичного струму знову таки отримано додаванням діамагнітного члену $\frac{n}{m}\delta_{ij}$ (знову таки без e^2):

$$\chi^J_{ij}(\vec q,\vec q\,',\omega) = \frac{n}{m}\delta_{ij} + \chi_{jp_i\,jp_j}(\vec q,\vec q\,',\omega). \quad (!)$$

Залежність від 2х змінних $\vec r, \vec r\,'$, відповідно, від $\vec q$ та $\vec q\,'$ є для систем із порушеною трансляційною інваріантністю. Зокрема, її порушує присутність домішок. Але у випадку так званого „самоусереднення" (тобто, коли є усереднення по позиціям домішок) трансляційна інваріантність відновлюється:

$$\chi_{jp_i\,jp_j}(\vec q,\vec q\,',\omega) = \chi_{jp_i\,jp_j}(\vec q,\omega)\,\delta_{\vec q,\vec q\,'} \text{ та}$$

$$\chi^J_{ij}(\vec q,\omega) = \frac{n}{m}\delta_{ij} + \chi_{jp_i\,jp_j}(\vec q,\omega). \quad (!!)$$

Нагадаю, „p" означає парамагнітний

Зв'язок між електричною провідністю та ядром електромагнітного відгуку.

Розглянемо відгук електронної системи на однорідне $(\vec{q}\to 0)$ електричне поле $\vec{E}(t)$, яке можна представити як часову похідну однорідного вект. потенціалу $\vec{A}(t) = -c\int_0^t \vec{E}(t')\,dt'$,

або $\vec{E}(t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

$$\vec{A}(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t}\vec{A}(t), \quad \vec{A}(t) = \int d\omega\, e^{-i\omega t}\vec{A}(\omega).$$

$$\vec{E}(\omega) = -\frac{1}{c}(-i)(\omega + i0)\vec{A}(\omega)$$

„$+i0$" ввели для причинності, як раніше.

$$\vec{A}(\omega) = -\frac{ic}{\omega}\vec{E}(\omega) = \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega + i0} \quad (\text{поклав } c=1)$$

$$j_i(\vec{q}\to 0, \omega) = K_{ij}(\vec{q}\to 0, \omega + i0)\frac{E_j(\omega)}{i(\omega + i0)}.$$

Нагадаю

$$K_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\langle \tau_{\mu\nu}\rangle \delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\nu 0}) - \Pi_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m),$$

$$\Pi_{\mu\nu}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\int_0^\beta d\tau\, e^{i\Omega_m\tau}\langle T_\tau \hat{j}_\mu(\vec{q},\tau)\hat{j}_\nu(-\vec{q},0)\rangle.$$

Зверну увагу на наступне:

$$j_i(\vec{p}) = \int d^d r\, e^{-i\vec{p}\vec{r}} j_i(\vec{r}).$$

Якщо $j_i(\vec{r}=0)$ – густина струму, то $j_i(\vec{p}=0)$ – повний струм $\sim$ об'єму V.

Саме тому ввели $1/L^d$ у кінці V: рнаве.

Таким чином, електрична провідн.

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{(-i)K_{ij}(\vec{p}=0,\omega)}{V(\omega+i0)} =$$

$$= i\,\frac{\langle T_{ij}\rangle + \Pi_{ij}(\vec{p}=0,\omega)}{V(\omega+i0)} \qquad (*)$$

$$\frac{\langle T_{ij}\rangle}{V} = \left|\begin{array}{l}\text{для парабол.}\\ \text{з-ну дисп.}\end{array}\right| = \frac{n}{m}\delta_{ij}.$$

Π_{ij} також $\sim V = L^d$.

Запишу теж саме в позначеннях Віґнера. Згідно (!) з (.13) (при $\vec{p}=0$):

$$-e\,j_i(0,\omega) = \frac{ie^2}{\omega+i0}\,\chi^J_{ij}(0,0,\omega)\,E_j(\omega)$$

Нагадаю, що для неоднорідної системи $\chi^J_{ij}(\vec{p},\vec{p}',\omega)$ залежить від 2х векторів. Також у співвідношенні

$$\chi_{jp_i\,jp_j}(\vec{p},\vec{p}',\omega) = \frac{1}{L^d}\chi_{jp\vec{p}\,i\;jp-\vec{p}'j}(\omega) \quad (+)$$

множник $\frac{1}{L^d}$ грає таку ж роль, як і вище!

Таким чином, і у позначеннях Віґнера:

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{ie^2}{\omega+i0}\chi^J_{ij}(0,0,\omega) =$$

$$= \frac{ie^2}{\omega+i0}\left[\frac{n}{m}\delta_{ij} + \chi_{jp_i\,jp_j}(0,0,\omega)\right]. \qquad (**)$$

Співвідношення $(*)$ та $(**)$ зазвичай називають формулою Кубо для електричної провідності.

З (+) у довгохвильовій границі маємо

$$\chi_{j_{p_i} j_{p_j}}(0,0,\omega) = \frac{1}{m^2 L^d}\chi_{P_i P_j}(\omega),$$

де $\hat{P}_i$ — компонента повного імпульсу. Таким чином ф-ла Кубо може бути переписана так:

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{i n e^2}{m(\omega + i0)}\left[\delta_{ij} + \frac{\chi_{P_i P_j}(\omega)}{n m L^d}\right].$$

Тепер перед тим, як разом продовжувати знайомство як з цією формулою, так і з ще більш загальною її початковою версією

$$J_\mu(q) = K_{\mu\nu}(q)\, A_\nu(q)$$

розглянемо два фактично феноменологічні приклади.

Формула Друде.

Розглянемо електрон в ел.м. полі та під впливом гальмуючої сили.

$$m\ddot{\vec r} = -eE(t) - \frac{m}{\tau}\dot{\vec r} \qquad (-e<0\ !)$$

$1/\tau$ — завдяки розсіянню на статичних домішках, тобто феноменологічний час за який процеси розсіяння зменшують швидкість $\vec v = \dot{\vec r}$ дрейфу електронів до нуля.

$$m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E}(t) - \frac{m}{\tau}\vec{v}(t)$$

У нормальному металі конкуренція між прискоренням у полі $\vec{E}$ та розсіянням призводить до дрейфу зі швидкістю $\vec{v} = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$.

Якщо маємо густину електронів n, то електрич. струм (густина струму):

$$\vec{j} = -en\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} \equiv \sigma\vec{E} \quad \text{(з-н Ома)}.$$

Розглянемо трохи важніше

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{-i\omega t} f(\omega)$$

$$-mi\omega\vec{v}(\omega) = -e\vec{E}(\omega) - \frac{m}{\tau}\vec{v}(\omega)$$

$$m\vec{v}(\omega)\left[\frac{1}{\tau} - i\omega\right] = -e\vec{E}(\omega) \Rightarrow$$

$$\vec{v}(\omega) = -\frac{e\vec{E}(\omega)}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{1/\tau - i\omega}\vec{E}(\omega)$$

Отримуємо пік Друде:

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{1/\tau - i\omega}.$$

На постійному струмі $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$, а при $\omega \gg \tau^{-1}$, $\sigma(\omega) \simeq i\frac{ne^2}{m}\omega^{-1}$ — немає залежності від τ, тобто рух електронів в електр. полі балістичний.

Ми збираємося переотримати цю формулу з формули Кубо, але зараз поговоримо про електромагнітний відгук надпровідника.

Коли $\tau \to \infty$, то

$\sigma(\omega) \sim \delta(\omega)$ – це так звана ідеальна провідність, тобто провідність без електр. опору.
Але це ще не дорівнює надпровідності.

Взагалі, коли обговорюють надпровідність, то зазвичай розглядають не границю $\vec{q} = 0$, а потім $\omega \to 0$, а протилежну: $\omega = 0$, $\vec{q} \to 0$.

Треба відзначити, що ми розглядаємо однорідну (зокрема без домішок) електронну рідину, то ці границі не комутують. (Див. Vignale)

Електромагнітний відгук надпровідника.

Певна кількість електронів з густиною n_s у НП поводить себе так, наче ~~вона~~ розсіюється, $\tau_s \to \infty$.

Для них

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{e\vec{E}}{m},$$

зараз я обрав $e = -|e|$ так, як це зазвичай роблять для опису НП. Тоді надпровідний струм

$$(1) \quad \frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m}\vec{E} = \frac{\vec{E}}{\Lambda}, \quad \Lambda^{-1} = \frac{c^2}{4\pi\lambda_L^2}.$$

Це рівняння називається першим рівнянням феноменологічної теорії братів Лондонів.

Друге рівняння теорії Лондонів таке:

$$\vec{H} = -c\,\mathrm{rot}(\Lambda \vec{j_s}) \, . \quad (2)$$

Разом з рівнянням Максвелла

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ воно дає

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$$

$$\vec{H} = -c\frac{c}{4\pi}\Lambda\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \lambda_L^2 \nabla^2 \vec{H} \, . \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\lambda_L^2}\vec{H}$$

Наприклад,

$$H(x) = H_0 e^{-x/\lambda_L} .$$

Це рівняння описує ефект Мейснера (можна сказати, що фотон стає масивним).

Фріц Лондон об'єднав (1) та (2) в одне рівняння

$$\vec{j_s} = -\frac{n_s e^2}{mc}\vec{A} = -\frac{1}{\Lambda c}\vec{A} \, .$$

Дійсно, якщо візьмемо $\frac{d}{dt}$, то отримаємо 1-ше рівняння Лондонів (1), а з $\mathrm{rot}\,\vec{j_s}$ — відповідно 2-ге (2).

Насправді (див. підручник Абрікосова), ми все одно маємо 2 рівняння. 2-ге це умова $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ — так звана калібровка Лондонів.

В мікроскопічній теорії Бардіна-Купера-Шріффера саме це рівняння і було отримано:

$$j_i(\vec{q}\to 0, \omega=0) = K_{ij}(\vec{q}\to 0, \omega=0)\, A_j(\vec{q}\to 0, \omega=0).$$

Тобто саме у НП діамагнітний та парамагнітний члени не скорочуються

$$\langle \tau \rangle + \mathrm{Re}\, \Pi(\vec{q}\to 0, 0) \neq 0.$$

У початковій роботі БКШ все це було отримано в калібровці Лондонів. Саме тому і виникло питання щодо калібровочної інваріантності цієї теорії та виконання загальних співвідношень для електромагн. ядра $K_{\mu\nu}$, з яких ми і почали наш загальний розгляд.

Зокрема, була проблема з виконанням умови

$$K_{ij}(q)\, q_i = 0 \quad (\text{це при } \omega = 0).$$

Саме розміркування цього питання призвело до відкриття та вивчення колективної моди Боголюбова-Андерсона-Голдстоуна, а потім і до відкриття механізму Хіггса.

У дуже загальних рисах поясню у чому справа (деталі у підручнику Шріффера).

Справа полягає у тому, що БКШ є теорією середнього поля, яка не враховує існування колективних збуджень.

Обчислення в БКШ, як я вже вказав, виконані в калібровці Лондона (London gauge):

$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \implies \vec{q} \cdot \vec{A}(\vec{q}, \omega) = 0.$

Векторне поле $\vec{A}(\vec{q}, \omega)$ завжди може бути розділено на повздовжню та поперечну частини:

$\vec{A}^{\,l}(\vec{q}, \omega) = \hat{q}\,[\hat{q} \cdot \vec{A}(\vec{q}, \omega)]$,

$\vec{A}^{\,t}(\vec{q}, \omega) = \vec{A}(\vec{q}, \omega) - \hat{q}\,[\hat{q} \cdot \vec{A}(\vec{q}, \omega)]$, де

$\hat{q}$ — одиничний вектор у напрямку $\vec{q}$: $\hat{q} = \dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$.

За визначенням

$\vec{q} \times \vec{A}^{\,l}(\vec{q}, \omega) = 0, \quad \vec{q} \cdot \vec{A}^{\,t}(\vec{q}, \omega) = 0.$

При калібровочних перетвореннях змінюється тільки повздовжня частина $\vec{A}$:

$\vec{A}(\vec{q}, \omega) \to \vec{A}(\vec{q}, \omega) + i\vec{q}\Lambda(\vec{q}, \omega) \quad (\vec{A}^{\,l} \to \vec{A}^{\,l} + i\vec{q}\Lambda)$

$\varphi(\vec{q}, \omega) \to \varphi(\vec{q}, \omega) + i\omega/c\,\Lambda(\vec{q}, \omega)$,

тоді як поперечна частина $\vec{A}^{\,t}$ калібровочно інваріантна.

Врахування присутності колективних збуджень призводить до того, що в правильній формулі з'являється проектор на поперечну частину ядра:

$K_{ij}(\omega = 0, \vec{q}) \longrightarrow K(\omega = 0, \vec{q}) \left(\delta_{ij} - \dfrac{q_i q_j}{q^2} \right).$

Видно, що для нового ядра умова $K_{ij}(\omega = 0, \vec{q})\, q_j = 0$ вже виконується.

Розбиття ядра електромагнітного відгуку на повздовжню та поперечну частини. Наслідки з калібровочної інваріантності. Правило сум для електричної провідності.

Ми тільки що бачили, що буде корисно розбивати електром. поле на повздовжню та поперечну частини. Якщо система однорідна та ізотропна, то тензор $\chi^J_{ij}(\vec{q},\omega)$ (я використовую зараз позначення Vignale, див. його (3.173)) можна розкласти на повздовжню та поперечну частини відносно до напрямку вектора $\vec{q}$, кожна з яких залежить від $|\vec{q}|$. Іншими словами, струм, індукований повздовжнім векторним потенціалом буде тільки повздовжнім, а, відповідно, поперечним $\vec{A}$ — тільки поперечним. Тобто

$$\chi^J_{ij}(\vec{q},\omega)=\chi_L(q,\omega)\frac{q_i q_j}{q^2}+$$

$$+\chi_T(q,\omega)\left(\delta_{ij}-\frac{q_i q_j}{q^2}\right),$$ де

χ_L та χ_T — відповідно повздовжня та поперечна ф-ї відгуку струм-струм. Це означає, що

$$\vec{j}_{L(T)}(q,\omega) = \frac{e}{c}\chi_{L(T)}(q,\omega)\vec{A}_{L(T)}(q,\omega).$$

Нагадаю, що $\vec{j}_{L(T)}$ – це струми частинок (щоб не плутати з електричн. струмом $\vec{I} = -e\vec{j}$!).

З розгляду на с. 8 (де я робив калібровочне перетворення) має бути очевидним, що задача одержання струмового відгуку на векторний потенціал містить в собі в якості граничного випадку задачу отримання густинного відгуку на скалярний потенціал. Власне, це було приховано при розгляді відгуку $\tilde{A}_\mu = K_{\mu\nu} A_\nu$! Вочевидь розгляд з просторовою частиною вект. потенціалу A_i є набагато більш загальним, бо як ми побачимо, включає в себе відгук на поперечний эл.-м. потенціал. Ми це бачили при розгляді ефекта Мейснера і це побачимо при орбітальної намагніченості.

Ми вже обговорювали наслідки калібровочної інваріантності для ядра $K_{\mu\nu}$ та $K_{ij}(\omega=0,q)$. Тепер уважніше подивимося на її наслідки для χ_L та χ_T.

Ми вже бачили, що задача з потенціалом $V(\vec{r},t) = -e\phi(\vec{r},t)$ має бути еквівалентна задачі із повздовжнім вект. потенціалом

$$\vec{A}(\vec{r},t) = c\int_0^t \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) = -\frac{c}{e}\int_0^t \vec{\nabla}V(\vec{r},t),$$

бо вони пов'язані калібровочним перетворенням.

В імпульсному просторі, відповідно, має бути еквівалентність фізичних ефектів при відгуку на $V(\vec{q},\omega)$ та повздовжній потенціал $\vec{A}_L(\vec{q},\omega) = \frac{c\vec{q}}{e\omega}V(\vec{q},\omega)$. (В нас похідна і інтеграл!)

Останній індукує повздовжній струм

$$\vec{j}_L(\vec{q},\omega) = \frac{\vec{q}}{\omega}\chi_L(\vec{q},\omega)V(\vec{q},\omega).$$

Коли ми отримували правило сум для відгуку густина-густина, то використали рівняння неперервності: $\frac{\partial}{\partial t}\hat{n}_{\vec{q}} = -i\vec{q}\cdot\vec{j}_{\vec{q}}$, або для самої густини $-i\omega n_1(\vec{q},\omega) = -i q\, j_L(\vec{q},\omega)$.

Таким чином маємо

$$n_1(\vec{q},\omega) = \frac{q}{\omega}j_L(\vec{q},\omega) = \frac{q^2}{\omega^2}\chi_L(\vec{q},\omega)\,V(\vec{q},\omega).$$

Нагадаю, що для відгуку густина в нас було

$$n_1(\vec{q},\omega) = \chi_{nn}(\vec{q},\omega)\,V(\vec{q},\omega).$$

А тому маємо

$$\chi_{nn}(q,\omega)=\frac{q^2}{\omega^2}\chi_L(q,\omega).$$

У спеціальному випадку $\omega=0$ маємо

$\chi_L(q,0)=0$ при скінченому q.

Це відповідає тому, що тільки повздовжній та статичний векторний потенціал не створює фізичного струму.

Для відгуку густина-густина ми мали правило сум

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \omega\,\mathrm{Im}\,\chi_{nn}(q,\omega)\,d\omega=\frac{nq^2}{m}. \quad (*)$$

Також ми отримали, що

$$\sigma_{ij}(\omega)=\frac{ie^2}{\omega}\chi_{ij}^J(q=0,\omega).$$

З $(*)$ ми маємо

$$-\frac{2q^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\mathrm{Im}\,\chi_L(q,\omega)=\frac{nq^2}{m}.$$

Скоротимо на q^2, а потім покладемо $q=0$ (сподіваємось, що можна так!). Звідси переотримуємо правило сум для повздовжньої електричної провідності:

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\,\sigma_L(\omega)\,d\omega=\frac{\pi n e^2}{2m}.$$

Нарешті, коли відсутній дальній (далекосяжний) порядок, то виконується так зване діамагнітне правило сум

$$\lim_{q\to 0} \chi_T(q,0) = \lim_{q\to 0} \chi_L(q,0) = 0.$$

Однак, коли надпровідність є, то

$$\lim_{q\to 0} \chi_T(q,0) \neq \lim_{q\to 0} \chi_L(q,0)\ !$$

Орбітальна магнітна сприйнятливість.

Це одна (окрім надпровідності) ситуація, коли потрібен поперечний відгук — це орбітальна намагніченість (тобто пов'язаний с рухом електронів).

Розглянемо магн. поле повздовж осі z та осцилює як функція y:

$\vec{B}(y) = \vec{e}_z B_q \cos(qy)$. Це поле можна задати за допомогою вект. потенц.

$$\vec{A}(y) = -\vec{e}_x \frac{B_q \sin qy}{q}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}.$$

Відповідний лінійний відгук направл. повздовж осі $\hat{x}$ і, як і векторний потенціал, є повністю поперечним.

Використавши

$$\vec{j}_T(q,\omega) = \frac{e}{c}\chi_T(q,\omega)\vec{A}_T(q,\omega)$$

запишемо

$$\vec{j}(y) = -\vec{e}_x \frac{e}{c}\chi_T(q,0)\frac{B_q}{q}\sin q y.$$

Тепер нагадаємо, що в електродинаміці густина зарядового струму пов'язана із орбітальною густиною намагніченості так:

$$-e\vec{j}(\vec{r}) = c\vec{\nabla}\times\vec{M}_{orb}(\vec{r}).$$

Оскільки $\vec{M}_{orb} \parallel \hat{z}$, то останнє рівняння приймає вигляд

$$\frac{\partial M_{orb}}{\partial y} = \frac{e}{c} j(y).$$

Далі беремо вже знайдений $j(y)$ та інтегруємо по y:

$$\vec{M}_{orb}(y) = -\vec{e}_z \frac{e^2}{c^2}\frac{\chi_T(q,0)}{q^2} B_q \cos qy.$$

Далі, у границі $q \to 0$ маємо

$$M_{orb} = \chi_{orb} B,$$

де M_{orb} та B – макроскопічні компоненти відповідних полів, а

$$\chi_{orb} = -\frac{e^2}{c^2}\lim_{q\to 0}\frac{\chi_T(q,0)}{q^2}$$

орбітальна магнітна сприйнятливість.

Бачимо, що необхідною умовою для існування скінченної магнітн. сприйнятливості є те, щоб

$\chi_T(q,0) \sim q^2$ при $q \to 0$,

тобто задовольнялося діамагнітн. правилу сум.

Підкреслюю, що у напівпровідниках, як ми бачили, це <u>не</u> виконується і χ_{orb} стає нескінченною.

Ізолятор, провідник (метал) чи напівпровідник?

Ми отримали ф-лу для електричн. провідності

$$\sigma_{ij}(\omega) = i\,\frac{\langle \tau_{ij} \rangle + \Pi^R_{ij}(\vec{q}=0,\omega)}{V(\omega+i0)},$$

де $\Pi_{ij}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\int_0^\beta d\tau\, e^{i\Omega_m \tau} \langle T_\tau\, j_i(\vec{q},\tau)\, j_j(-\vec{q},0)\rangle$,

а $\frac{\langle \tau_{ij} \rangle}{V} = \left| \text{для } \varepsilon(\vec{k}) = \frac{\vec{k}^2}{2m} \right| = \frac{n}{m}\delta_{ij}$.

В позначеннях Vignale теж саме

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{ie^2}{\omega+i0}\chi_{ij}(0,0,\omega) =$$

$$= \frac{ie^2}{\omega+i0}\left[\frac{n}{m}\delta_{ij} + \chi_{j_{pi} j_{pj}}(0,0,\omega)\right].$$

Підкреслю, що на відміну від Vignale я пишу $\frac{1}{\omega+i0}$, бо вважаю це істотним.

Мій розгляд далі слідує Розділу 3.4.4 Vignale, а також статті „Insulator, metal or superconductor: The Criteria", D. J. Scalapino, S.R. White, S. Zhang, Phys. Rev. B 47, 7995 (1993).

29

Я вже казав і ще раз нагадаю, що в однорідній (зокрема, без домішок) електронній рідині границі $\vec{q} \to 0$, а потім $\omega \to 0$ та $\omega \to 0$ та $q \to 0$ не комутують.

Ми теоретики, але можемо аналітично, або чисельно досліджувати якусь теоретичну модель, наприклад, Хаббарда (або за Вікі Габбарда). Якщо модель складна, то можемо не враховувати наявність домішок, які, насправді, завжди присутні. Це означатиме, що $\tau \to \infty$, хоча це і не буде надпровідником.

Як зрозуміти ізолятор чи метал, або надпровідник наша система?

Можна розбити провідність на сингулярну та регулярну частини (для скорочення я покладу $\vec{q}=0$ та не буду його писати, а також $V=1$):

$$\sigma_{ij}(\omega) \equiv \sigma_{ij}^{sing}(\omega) + \sigma_{ij}^{reg}(\omega) = \qquad (*)$$

$$= \frac{i}{\omega+i0}\left[\langle \tau_{ij} \rangle + \Pi_{ij}^{R}(0)\right] + \frac{i}{\omega}\left[\Pi_{ij}^{R}(\omega) - \Pi_{ij}^{R}(0)\right].$$

Із ф-ли Друде ми бачили, що

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1/\tau - i\omega} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} D\,\delta(\omega)$$

Коефіцієнт D називається вагою Друде і в нашому найпростішому випадку $D = \frac{\pi n e^2}{m}$ $\left(\frac{D}{\pi} = \frac{ne^2}{m}\right)$.

Давайте розглядати випадок $T=0$, та як вже перекреслював без домішок. Із (*) слідує, що

$$\mathrm{Re}\,\sigma_{xx}(\omega) = D\,\delta(\omega) + \sigma_{xx}^{reg}(\omega),$$ з

$$\frac{D}{\pi} = \langle \tau_{xx} \rangle + \mathrm{Re}\,\Pi_{xx}(\vec{q}=0,\, \omega \to 0).$$

Бачимо, що вага Друде визначається поведінкою цієї функції при $\omega \to 0$.

У відсутності домішок метал характеризується скінченим D (тобто $R=0$), а ізолятор $D=0$.

Якщо досліження ведеться чисельними методами, то в системі скінченого розміру D буде скінченим, але чисельно перевіряють, що воно $\longrightarrow 0$ у границі $V \to \infty$.

Надпровідність, як я вже казав, характеризується іншим порядком граничних переходів: спочатку $\omega \to$, а потім $\vec{q} \to 0$.

Ба більше, є ще залежність від порядку $q_x \to 0$, а потім q_y та $q_z \to 0$.

Ми бачимо, що K_{ij} має містити проектор $\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}$.

Для поперечної частини як раз у „xx" напрямку:

$$K_{xx} \sim 1 - \frac{\rho_x^2}{\vec{\rho}^2} = \frac{\vec{\rho}^2 - \rho_x^2}{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} = \left| \begin{matrix} \text{Спочатку} \\ \rho_x \to 0 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{\rho_y^2 + \rho_z^2}{\rho_y^2 + \rho_z^2} = \left| \begin{matrix} \rho_y \to 0 \\ \rho_z \to 0 \end{matrix} \right| = 1.$$

Якщо у протилежному порядку, то в чисельнику $\rho_y^2 + \rho_z^2 \to 0$ при $\rho_y, \rho_z \to 0$.

Ви вже бачили рівняння Лондона

$$j_x(\rho_y) = -\frac{1}{4\pi\lambda^2} A_x(\rho_y), \text{ де}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}$$ з надпровідною густиною n_s.

Бачимо, що це випливає з того, що при $\omega = 0$

$$\langle j_i(\vec{\rho}) \rangle = f(\vec{\rho}) \left[\delta_{ij} - \frac{\rho_i \rho_j}{\vec{\rho}^2} \right] A(\vec{\rho}),$$

тобто у надпровіднику

$$-\frac{f(\vec{\rho} \to 0)}{e^2} = \frac{n_s}{m} \equiv \frac{D_s}{\pi e^2}, \text{ де ми}$$

ввели надпровідну вагу D_s. Через ф-лу Кубо

$$\frac{D_s}{\pi} = \langle T_{xx} \rangle + \Pi_{xx}(\rho_x = 0, \rho_y \to 0, \rho_z \to 0, i\Omega_m = 0).$$

Таким чином, різниця між D_s та D в очередності взяття границь $\rho_y \to 0$, $\rho_z \to 0$ та $i\Omega_m = 0$.

Ізолятор, метал чи надпровідник визначається величинами D_s та D.

Для системи без розсіювань

D та $D_s = 0$ в ізоляторі,

$D \neq 0$ та $D_s = 0$ в металі,

і $D, D_s \neq 0$ в надпровіднику.

При скінченній температурі, або якщо є безпорядок, то

$D = 0$, але $\sigma_{xx}(\omega = 0)$ залишається скінченною.

Ізолятор, провідник (метал) чи надпровідник?

Ми отримали ф-лу для електричн. провідності

$$\sigma_{ij}(\omega) = i\,\frac{\langle \tau_{ij}\rangle + \Pi^R_{ij}(\vec{q}=0,\omega)}{V(\omega+i0)},$$

де $\Pi_{ij}(\vec{q}, i\Omega_m) = -\int_0^\beta d\tau\, e^{i\Omega_m \tau} \langle T_\tau\, j_i(\vec{q},\tau)\, j_j(-\vec{q},0)\rangle$,

а $\dfrac{\langle \tau_{ij}\rangle}{V} = \left| \text{для } \varepsilon(\vec{k}) = \dfrac{\vec{k}^2}{2m} \right| = \dfrac{n}{m}\delta_{ij}$.

В позначеннях Vignale теж саме

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{ie^2}{\omega+i0}\,\chi_{ij}(0,0,\omega) =$$

$$= \frac{ie^2}{\omega+i0}\left[\frac{n}{m}\delta_{ij} + \chi_{j_{pi} j_{pj}}(0,0,\omega)\right].$$

Підкреслю, що на відміну від Vignale я пишу $\dfrac{1}{\omega+i0}$, бо вважаю це істотним.

Мій розгляд далі слідує Розділу 3.4.4 Vignale, а також статті „Insulator, metal or superconductor: The Criteria", D. J. Scalapino, S. R. White, S. Zhang, Phys. Rev. B 47, 7995 (1993).