

8. Гомотопічно проєктивні модулі. Навколо похідних категорій

Володимир Любашенко

25 березня 2021

Конус квазі-ізоморфізма – ациклічний

Let \mathcal{C} be a **dg**-category over a commutative ring \mathbb{k} .

Lemma (well-known)

Let $g : A \rightarrow B \in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$. Then g is a quasi-isomorphism iff $\text{Cone } g$ is acyclic.

Доведення.

For all $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ the functor $A \mapsto H^0(A(X))$ is cohomological.

The distinguished triangle $A \xrightarrow{g} B \rightarrow \text{Cone } g \rightarrow$ in $H^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ implies exact sequence

$$\begin{aligned} H^{k-1}(\text{Cone } g(X)) &\rightarrow H^k(A(X)) \rightarrow H^k(B(X)) \\ &\rightarrow H^k(\text{Cone } g(X)) \rightarrow H^{k+1}(A(X)) \rightarrow H^{k+1}(B(X)). \end{aligned}$$

Vanishing of $H^\bullet(\text{Cone } g(X))$ is equivalent to $H^\bullet(g(X))$ being an isomorphism. □

Конус гомотопійно оборотного морфізма – стягуваний

Lemma (well-known)

Let $f : M \rightarrow N \in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$. Then f is homotopy invertible iff $\mathbf{Cone} f$ is contractible.

Доведення. Assume that $\mathbf{Cone} f = (M[1] \oplus N, d_{\mathbf{Cone} f})$ is contractible,

$$d_{\mathbf{Cone} f} = \begin{pmatrix} d_M[1] & \sigma^{-1} \cdot f \\ 0 & d_N \end{pmatrix}.$$

The contracting homotopy $h \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(\mathbf{Cone} f, \mathbf{Cone} f)^{-1}$ can be presented as

$$h = \begin{pmatrix} \alpha[1] & \sigma^{-1} \cdot \delta \\ g \cdot \sigma & \beta \end{pmatrix},$$

where $g \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(N, M)^0, \alpha \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(M, M)^{-1}, \beta \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(N, N)^{-1}, \delta \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(M, N)^{-2}$.

The equation $d_{\mathbf{Cone}f}h + hd_{\mathbf{Cone}f} = 1_{\mathbf{Cone}f}$ can be written as the system

$$\begin{aligned}d_N g &= g d_M, \\1_M - f \cdot g &= d_M \alpha + \alpha d_M, \\1_N - g \cdot f &= d_N \beta + \beta d_N, \\ \alpha \cdot f - f \cdot \beta &= \delta \cdot d_N - d_M \cdot \delta \equiv [\delta, d]\end{aligned}$$

The first equation says that $g : N \rightarrow M \in \mathbf{Z}^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$. The second and the third say that g is homotopy inverse to f .

The fourth equation says that we deal with representation of Kontsevich's category!

Assume that $f : M \rightarrow N \in \mathbf{Z}^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ is homotopy invertible.
 The category $\mathbf{H}^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ is triangulated. The square

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ f \downarrow & = & \downarrow 1 \\ N & \xrightarrow{1} & N \end{array}$$

extends to a morphism of distinguished triangles

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & \mathbf{Cone} f & \longrightarrow & M[1] \\ f \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow 0 & & \downarrow f[1] \\ N & \xrightarrow{1} & N & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N[1] \end{array}$$

by property [TR3] of triangulated category $\mathbf{H}^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$.
 The morphism $0 : \mathbf{Cone} f \rightarrow 0$ is invertible in $\mathbf{H}^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$, that is, $\mathbf{Cone} f$ is contractible. □

Квазі-ізоморфізм гомотопійно проєктивних модулів гомотопійно оборотний

Proposition

Let $f : M \rightarrow N$ be a quasi-isomorphism of homotopy projective \mathcal{C} -modules. Then f is homotopy invertible.

Доведення.

Since f is a quasi-isomorphism, $\mathbf{Cone}f$ is acyclic by Lemma 1. On the other hand, $\mathbf{Cone}f$ is homotopy projective. The identity morphism $\text{id} : \mathbf{Cone}f \rightarrow \mathbf{Cone}f \in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ is a morphism from a homotopy projective \mathcal{C} -module to an acyclic \mathcal{C} -module. Hence, $[\text{id}_{\mathbf{Cone}f}] = 0 \in H^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$, that is, $\mathbf{Cone}f$ is contractible. By Lemma 2 f is homotopy invertible. \square

Lemma (see Verdier, Proposition 2.3.3)

Consider a diagram in $Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ & \searrow f & \\ Q & \xrightarrow{\sim} & N \end{array}$$

where r is a quasi-isomorphism, $P \in \text{h-proj-}\mathcal{C}$.

Then there is a morphism $g : P \rightarrow Q \in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ such that the triangle

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow g & \searrow f & \\ Q & \xrightarrow{\sim} & N \end{array} \quad (1)$$

commutes up to homotopy.

Доведення.

$\text{Cone } r$ is acyclic by Lemma 1. The composition

$$P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\alpha(r)=(0 \ 1)} \text{Cone}(r : Q \rightarrow N) = (Q[1] \oplus N, d_{\text{Cone } r})$$

is null-homotopic, being a map from a homotopy projective module to an acyclic module. Therefore, there is a homotopy $h \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(P, (Q[1] \oplus N, d_{\text{Cone } r}))^{-1}$ such that

$$f \cdot \alpha(r) = d_P \cdot h + h \cdot d_{\text{Cone } r}. \quad (2)$$

Representing the homotopy as $h = (g \cdot \sigma, \gamma)$, $g \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(P, Q)^0$, $\gamma \in \text{dgMod-}\mathcal{C}(P, N)^{-1}$ we see that (2) is equivalent to requirements

$$\begin{aligned} g &\in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}(P, Q), \\ f &= g \cdot r + d_P \cdot \gamma + \gamma \cdot d_N, \end{aligned}$$

which is the precise statement about homotopy commutativity of (1). □

Corollary

(a) Given a diagram in $Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} P & & Q \\ \downarrow t & & \downarrow \wr r \\ M & \xrightarrow{j} & N \end{array}$$

with homotopy projective P and a quasi-isomorphism r there is a morphism $g : P \rightarrow Q \in Z^0 \text{dgMod-}\mathcal{C}$ such that the square

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ \downarrow t & \sim & \downarrow \wr r \\ M & \xrightarrow{j} & N \end{array}$$

commutes up to homotopy.

(b) If, moreover, Q is homotopy projective and t, j are quasi-isomorphisms, then g is homotopy invertible.

Доведення.

(b) The left hand side of equation $t \cdot j - d_P \cdot \gamma - \gamma \cdot d_N = g \cdot r$ is a quasi-isomorphism, since $H^\bullet(t \cdot j - d_P \cdot \gamma - \gamma \cdot d_N) = H^\bullet(t \cdot j)$.

Therefore, g is a quasi-isomorphism. By Proposition 1 g is homotopy invertible. □

2.3.2. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur et X un objet de \mathcal{C}' . Rappelons qu'un objet Y de \mathcal{C} est dit *F-libre à droite sur X*, ou simplement *libre à droite sur X*, s'il existe un morphisme $u : F(Y) \longrightarrow X$ tel que pour tout morphisme $F(Z) \xrightarrow{v} X$, il existe un et un seul morphisme $w : Z \longrightarrow Y$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u} & X \\ & \swarrow F(w) & \nearrow v \\ & F(Z) & \end{array}$$

Об'єкти вільні зліва

La flèche $u : F(Y) \longrightarrow X$ s'appelle *flèche de liberté* pour le couple (X, Y) (relativement au foncteur F). Cela peut encore s'interpréter, en prenant un univers dont \mathcal{C} et \mathcal{C}' soient des éléments, en disant que Y est libre à droite sur X s'il existe un isomorphisme entre les foncteurs $Z \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ et $Z \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Z), X)$. Nous dirons qu'un objet Y de \mathcal{C} est *F-libre à droite* s'il existe un objet X de \mathcal{C}' tel que Y soit libre à droite sur X . Nous dirons qu'un objet X de \mathcal{C}' est *F-libérable à droite* s'il existe un objet Y de \mathcal{C} libre à droite sur X . On définit de façon analogue, par passage aux catégories opposées, les notions d'objet libre ou libérable à *gauche*.

Властивості гомотопійно проєктивних модулів

Proposition 2.3.3. *Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, \mathcal{B} une sous-catégorie triangulée pleine, $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ le foncteur de passage au quotient (2.2.10), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ le système multiplicatif de \mathcal{D} associé à \mathcal{B} (2.1.8).*

a) *Pour tout objet Y de \mathcal{D} , les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'objet Y est Q -libre à droite.*

ii) *Pour tout morphisme $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, $s : S \rightarrow T$, l'application :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(s, Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S, Y)$$

est une bijection.

iii) *Pour tout objet B de \mathcal{B} , $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, Y) = 0$.*

iv) *Tout morphisme $Y \xrightarrow{s} Z$, avec $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, admet une rétraction.*

v) *Pour tout objet X de \mathcal{D} , l'application :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y))$$

est bijective.

Для нас $\mathcal{D} = \mathrm{H}^0 \mathrm{dgMod}\text{-}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, $\mathcal{B} = \mathrm{H}^0 \mathrm{dgAcyc}\text{-}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,
 $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) = \{\mathrm{qis}\}^{\mathrm{op}}$.

2.3.4. Démonstration de la proposition 2.3.3 : Démontrons *a*). Tout d'abord, si Y est Q -libre à droite, le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ est isomorphe au foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Z)$, pour un objet Z convenable de \mathcal{D}/\mathcal{B} . Par suite, le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ transforme les morphismes de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ en isomorphismes. Ceci démontre l'implication $i) \Rightarrow ii)$. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ résulte de ce que le morphisme $B \rightarrow 0$ est un morphisme de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$. L'implication $iii) \Rightarrow iv)$ résulte de la définition de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et de (1.2.6). L'implication $iv) \Rightarrow v)$ résulte de l'isomorphisme (2.2.4) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y \setminus S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot) \quad .$$

Enfin, l'implication $v) \Rightarrow i)$ est évidente : Y est libre à droite sur $Q(Y)$.

Кодобутки і добутки в похідній категорії

Lemma

Let \mathcal{A} be a small abelian category and let $\{A_n^*\}_{n \geq 0} \subseteq \text{Ob}(D^?(A))$.

- (1) If $A_n^i = 0$ for all $i > -n$ and $? = -, \emptyset$, then $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n^*$ is a coproduct in $D^?(A)$, i.e. there is a canonical isomorphism



$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n^* \cong \prod_{n=0}^{\infty} A_n^*.$$

- (2) If $A_n^i = 0$ for all $i < n$ and $? = +, \emptyset$, then $\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n^*$ is a product in $D^?(A)$, i.e. there is a canonical isomorphism

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n^* \cong \prod_{n=0}^{\infty} A_n^*.$$

Corollary

Let \mathcal{A} be a small abelian category and let $\{A^i\}_{i \geq 0} \subseteq \text{Ob}(A)$. Then $\bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i[k+i]$ is a coproduct in $D^-(A)$ and $D(A)$, while $\bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i[k-i]$ is a product in $D^+(A)$ and $D(A)$, for all $k \in \mathbb{Z}$.

-  Alberto Canonaco, Amnon Neeman, and Paolo Stellari, Uniqueness of enhancements for derived and geometric categories, 2021, arXiv:2101.04404 §1.5 – §1.6
-  Jean-Louis Verdier, Des catégories dérivées des catégories abéliennes, Astérisque (1996), no. 239, xii+253 pp., With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. §2.3.2 – §2.3.4