5. Модельна структура на категорії dg-категорій. Навколо похідних категорій

Володимир Любашенко

4 березня 2021

Приклад

Following [2, 3.7.1], we define $\mathcal{K}$ to be the dg category that has two objects 1, 2 and whose morphisms are generated by $f \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ and $r_{12} \in \mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ subject to the relations $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g = 0$, $\mathrm{d}r_1 = gf - \mathbf{1}_1$, $\mathrm{d}r_2 = fg - \mathbf{1}_2$ and $\mathrm{d}r_{12} = fr_1 - r_2 f$. Let $\mathcal{A}$ be the dg category with $\mathcal{A}(1,1) = \Bbbk$, $\mathcal{A}(1,2) = \Bbbk\mathrm{f}$, $\mathcal{A}(2,1) = \Bbbk\mathrm{g}$, $\mathcal{A}_0(2,2) = \Bbbk$ such that $\mathrm{f} \cdot \mathrm{g} = 1$, $\mathrm{g} \cdot \mathrm{f} = 1$.

Kontsevich's category

$$\mathcal{K} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "r_1"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend left=70, "r_{12}"] & 2 \arrow[loop right, "r_2"] \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

is quasi-isomorphic to $\mathcal{A}$ via q_3

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_0 \arrow[r, hook, "\mathrm{h}_0"] \arrow[drr, "\mathrm{q}_0"'] & \mathcal{A}_1 \arrow[r, hook, "\mathrm{h}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{q}_1"] & \mathcal{A}_2 \arrow[r, hook, "\mathrm{h}_2"] \arrow[d, "\mathrm{q}_2"] & \mathcal{A}_3 \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\mathrm{q}_3"] & \mathcal{K} \\ & & \mathcal{A} & & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{A}_0(1,1) = \Bbbk$, $\mathcal{A}_0(1,2) = 0$, $\mathcal{A}_0(2,1) = 0$, $\mathcal{A}_0(2,2) = \Bbbk$.

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1\langle \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2\rangle$, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2\langle \mathrm{r}_{12}\rangle = \mathcal{K}$.

$\mathrm{q}_3(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_{12}) = 0$, $\mathrm{q}_3(\mathrm{f}) = \mathrm{f}$, $\mathrm{q}_3(\mathrm{g}) = \mathrm{g}$.

Припустимо, що $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{N} \in \mathsf{dg}$. Позначимо через $\mathsf{Cone}\,\alpha = (\mathrm{M}[1] \oplus \mathrm{N}, \mathrm{d}_{\mathsf{Cone}}) \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{dg}$ градуйований $\Bbbk$-модуль з диференціалом

$$\mathrm{d}_{\mathsf{Cone}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{\mathrm{M}}[1] & \sigma^{-1}\alpha \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^{-1}\mathrm{d}_{\mathrm{M}}\sigma & \sigma^{-1}\alpha \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}.$$

Наступний результат узагальнює теорему Хініча.

Theorem

Припустимо, що S - це множина, категорія $\mathcal{C}$ є повною і коповною і $\mathrm{F} : \mathsf{dg}^{\mathrm{S}} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathrm{U}$ є спряженням. Припустимо, що U зберігає фільтруючі кограниці. Для будь-якого $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$ розглянемо об'єкт $\mathbb{K}_{\mathrm{x}}$ з dg^{S}, $\mathbb{K}_{\mathrm{x}}(\mathrm{x}) = \mathsf{Cone}(\mathsf{id}_{\Bbbk})$, $\mathbb{K}_{\mathrm{x}}(\mathrm{y}) = 0$ для $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$. Припустимо, що ланцюгове відображення $\mathrm{U}(\mathsf{in}_2) : \mathrm{UA} \to \mathrm{U}(\mathrm{F}(\mathbb{K}_{\mathrm{x}}[\mathrm{p}]) \sqcup \mathrm{A})$ - квазіізоморфізм для всіх об'єктів A з $\mathcal{C}$ і всіх $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{Z}$. Оснастимо $\mathcal{C}$ класами слабких еквівалентів (відповідно фібрацій), що складаються з морфізмів f з $\mathcal{C}$ таких що Uf - квазіізоморфізм (відповідно епіморфізм). Тоді категорія $\mathcal{C}$ - модельна категорія.

Застосування теореми Хініча

$\mathrm{E} = \text{set}$, $\mathrm{S} = \mathrm{E}^2$, $\mathcal{C} = $ subcategory of $\mathsf{dg}\,\mathcal{C}\mathrm{at}$,
$\mathsf{Ob}\,\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{dg}\,\mathcal{C}\mathrm{at} \mid \mathsf{Ob}\,\mathcal{A} = \mathrm{E}\}$
$\mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \{\mathrm{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \in \mathsf{Mor}\,\mathsf{dg}\,\mathcal{C}\mathrm{at} \mid \mathsf{Ob}\,\mathrm{F} = \mathsf{id}_{\mathrm{E}}\}$
Let $\mathrm{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $\mathrm{d} \mapsto \mathrm{Gd}$. Then $\exists \lim \mathrm{G}$
$(\lim \mathrm{G})(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \lim\bigl(\mathcal{D} \ni \mathrm{d} \mapsto (\mathrm{Gd})(\mathrm{X},\mathrm{Y})\bigr)$, $\forall \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathrm{E}$,
the last diagram is $\mathcal{D} \to \mathsf{dg}$. Thus $\mathcal{C}$ is complete.
Let $\mathrm{G_i} \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$ for $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Then $\exists \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i} = $ free product of $\mathrm{G_i}$,
the complex $(\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i})(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ is a quotient of complex

$$\bigoplus_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\mathrm{j}\in\mathrm{I}^{\mathrm{n}}} \bigoplus_{(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1}\in\mathrm{E}^{\mathrm{n}-1}}^{\mathrm{X_0}=\mathrm{X},\mathrm{X_n}=\mathrm{Y}} \mathrm{G}_{\mathrm{j}_1}(\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_1)\otimes\mathrm{G}_{\mathrm{j}_2}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)\otimes\cdots\otimes\mathrm{G}_{\mathrm{j}_\mathrm{n}}(\mathrm{X}_{\mathrm{n}-1},\mathrm{X}_\mathrm{n})$$

cokernel of a chain map reflecting composition, if $\mathrm{j}_1 = \mathrm{j}_2$, or $\mathrm{j}_2 = \mathrm{j}_3$, or $\dots$, or inserting-deleting the unit, if $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_1$, or $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2$, or $\dots$. $\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}$ – the category of paths generated by $\bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}$.
$\exists\,\mathsf{colim}(\mathrm{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ – the quotient of $\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathsf{Ob}\,\mathcal{D}} \mathrm{G_i}$.
Thus $\mathcal{C}$ is cocomplete.

The free dg-category functor $F : \mathsf{dg}^{E^2} \to \mathcal{C}$, $Q \mapsto FQ$,

$$FQ(X, Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{(X_i)_{i=1}^{n-1}\in E^{n-1}}^{X_0=X, X_n=Y} Q(X_0, X_1) \otimes Q(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes Q(X_{n-1}, X_n)$$

is left adjoint to the underlying functor $\mathsf{dg}^{E^2} \leftarrow \mathcal{C} : U$, (cf. [Mac Lane])

$$\mathcal{C}(FQ, \mathcal{A}) \cong \mathsf{dg}^{E^2}(Q, U\mathcal{A}).$$

For $\mathcal{A} = FQ$ the element $1_{FQ} \leftrightarrow$ adjunction unit $\eta : Q \to UFQ$;
the counit $(\varepsilon : FU\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \leftrightarrow 1_{U\mathcal{A}}$ for $Q = U\mathcal{A}$.
U preserves filtering colimits. A category J is filtered when

- it is not empty,
- for every two objects j and j' in J there exists an object k and two arrows $f : j \to k$ and $f' : j' \to k$ in J,
- for every two parallel arrows $u, v : i \to j$ in J, there exists an object k and an arrow $w : j \to k$ such that $wu = wv$.

A filtered colimit is a colimit of a functor $F : J \to \mathcal{C}$ where J is a filtered category.

The quiver $\mathbb{K}_x[p]$ is contractible, $x = (X', Y')$. $\Rightarrow$ Any $\mathbb{K}_x[p] \otimes M$ is contractible. $\Rightarrow$ For $Q = \mathbb{K}_x[p]$ the free non-unital dg-category

$$F^+Q(X,Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}^{n>0} \bigoplus_{(X_i)_{i=1}^{n-1}\in E^{n-1}}^{X_0=X, X_n=Y} Q(X_0,X_1)\otimes Q(X_1,X_2)\otimes\cdots\otimes Q(X_{n-1},X_n)$$

is contractible. $\Rightarrow$

$$(FQ \sqcup \mathcal{A})(X,Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}^{n>0} \bigoplus_{(X_i)_{i=1}^{n-1}\in E^{n-1}}^{X_0=X, X_n=Y} F^+Q(X_0,X_1)\otimes \mathcal{A}(X_1,X_2)\otimes F^+Q(X_2,X_3)\otimes\dots$$

$$\oplus$$

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}^{n>0} \bigoplus_{(X_i)_{i=1}^{n-1}\in E^{n-1}}^{X_0=X, X_n=Y} \mathcal{A}(X_0,X_1)\otimes F^+Q(X_1,X_2)\otimes \mathcal{A}(X_2,X_3)\otimes\dots$$

retracts to $\mathcal{A}(X,Y)$. $\Rightarrow$ $U(\mathsf{in}_2) : U\mathcal{A} \to U(FQ \sqcup \mathcal{A})$ - qis

Доведення теореми Хініча

Умови теореми ми зараз припускаємо. З доведення випливає теорема Хініча [1, Section 2.2] ідеологічно, але не в деталях. Конструкції, використані у доведенні, описують кофібрації та тривіальні кофібрації в $\mathcal{C}$.

Позначимо функтор U також як $-^{\#}$, $\mathrm{UX} = \mathrm{X}^{\#}$ для $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$ або $\mathrm{X} \in \mathsf{Mor}\,\mathcal{C}$. Нехай $\varepsilon : \mathrm{FUA} \to \mathrm{A}$ є коодиницею спряження та нехай $\eta : \mathrm{M} \to \mathrm{UFM}$ є одиницею спряження. Бієкція спряження задається взаємно оберненими відображеннями

$$(\mathrm{l} : \mathrm{FM} \to \mathrm{A}) \longmapsto \mathrm{l}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{M} \xrightarrow{\eta} (\mathrm{FM})^{\#} \xrightarrow{\mathrm{l}^{\#}} \mathrm{A}^{\#}),$$

$$^{\mathrm{t}}\mathrm{x} = (\mathrm{FM} \xrightarrow{\mathrm{Fx}} \mathrm{F}(\mathrm{A}^{\#}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{A}) \longleftarrow (\mathrm{x} : \mathrm{M} \to \mathrm{A}^{\#}).$$

Означимо три класи морфізмів у $\mathcal{C}$:

$\mathcal{W} = \{\mathrm{f} \in \mathsf{Mor}\,\mathcal{C} \mid \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{S}\ \mathrm{f}^{\#}(\mathrm{x})$ - квазіізоморфізм$\}$,

$\mathcal{R}_{\mathrm{f}} = \{\mathrm{f} \in \mathsf{Mor}\,\mathcal{C} \mid \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{S}\ \forall\, \mathrm{z} \in \mathbb{Z}\ \mathrm{f}^{\#}(\mathrm{x})^{\mathrm{z}}$ є сюр'єктивним$\}$,

$\mathcal{L}_{\mathrm{c}} = {}^{\boxslash}\mathcal{R}_{\mathrm{tf}}$ складається з відображень $\mathrm{f} \in \mathsf{Mor}\,\mathcal{C}$ з властивістю лівого підйома стосовно всіх морфізмів з $\mathcal{R}_{\mathrm{tf}} = \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_{\mathrm{f}}$.

Ми доведемо, що вони є слабкими еквівалентностями, фібраціями та кофібраціями модельної структури на $\mathcal{C}$.

Нехай $\mathrm{M} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$, $\mathrm{A} \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$, $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{A}^{\#} \in \mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$. Позначимо через $\mathrm{C} = \mathsf{Cone}\,\alpha = (\mathrm{M}[1] \oplus \mathrm{UA}, \mathrm{d}_{\mathsf{Cone}}) \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$ конус, взятий точково, тобто для будь-якого $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$ комплекс $\mathrm{C}(\mathrm{x}) = \mathsf{Cone}(\alpha(\mathrm{x}) : \mathrm{M}(\mathrm{x}) \to (\mathrm{UA})(\mathrm{x}))$ - звичайний конус.
Позначимо через $\bar{\imath} = \mathsf{in}_2 : \mathrm{UA} \to \mathrm{C}$ очевидне вкладення.
Услід Хінічу [1, Section 2.2.2] означимо об'єкт $\mathrm{A}\langle\mathrm{M}, \alpha\rangle \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$ як виштовхування

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{FU(A)} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mathrm{F}\bar{\imath}"'] & \mathrm{A} \arrow[d, "\bar{\jmath}"] \\
\mathrm{FC} \arrow[r, "\mathrm{g}"] & \mathrm{A}\langle\mathrm{M}, \alpha\rangle
\end{tikzcd}
$$

Введемо функтор $\mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathsf{et}$:

$$\mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}(\mathrm{B}) = \{(\mathrm{f},\mathrm{t}) \in \mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \times \underline{\mathsf{dg}}^{\mathrm{S}}(\mathrm{M},\mathrm{B}^{\#})^{-1} \mid$$
$$(\mathrm{t})\mathrm{d} \equiv \mathrm{t}\mathrm{d}_{\mathrm{B}^{\#}} + \mathrm{d}_{\mathrm{M}}\mathrm{t} = (\mathrm{M} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{A}^{\#} \xrightarrow{\mathrm{f}^{\#}} \mathrm{B}^{\#})\}.$$

Lemma

Об'єкт $\mathrm{D} = \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle$ і елемент $(\bar{\jmath}, \theta) \in \mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}(\mathrm{D})$ представляють функтор $\mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}$, де

$$\theta = (\mathrm{M} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{M}[1] \xrightarrow{\mathsf{in}_1} \mathrm{C} \xrightarrow{\eta} \mathrm{UFC} \xrightarrow{\mathrm{Ug}} \mathrm{UD}).$$

Тобто природне по B перетворення $\psi_{\mathrm{B}} : \mathcal{C}(\mathrm{D},\mathrm{B}) \to \mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}(\mathrm{B})$, $1_{\mathrm{D}} \mapsto (\bar{\jmath}, \theta)$, є бієктивним.

Corollary

Відображення $(\mathrm{M} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{A}^{\#} \xrightarrow{\bar{\jmath}^{\#}} \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle^{\#}) = (\theta)\mathrm{d}$ гомотопне нулю. Якщо $\mathrm{d}_{\mathrm{M}} = 0$, то для будь-якого циклу $\mathrm{m} \in \mathrm{ZM}$ цикл $\mathrm{m}\alpha \in \mathrm{ZA}^{\#}$ переводиться відображенням $\bar{\jmath}^{\#}$ до межі елемента $\mathrm{m}\theta \in \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle^{\#}$.

Таким чином, коли $\mathrm{F} : \mathsf{dg}^{\mathrm{S}} \to \mathcal{C}$ є функтором побудови вільної dg-категорії, відображення $\bar{\jmath}$ інтерпретуються як "додавання змінних для знищення циклів".

Наступне твердження добре відоме.

Lemma

Припустимо, що $g : U \to V \in \mathsf{dg}$ - сюр‘єктивний квазіізоморфізм. Тоді для будь-якої пари (u, v), $u \in U^{n+1}$, $v \in V^n$, такої, що $ud = 0$, $ug = vd$ існує елемент $w \in U^n$, такий, що $wd = u$, $wg = v$.

Доведення.

З перетворення на нуль $H^{n+1}(g)[u] = [gu] = 0$ випливає перетворення на нуль класу когомологій $[u] = 0$. Існує $y \in U^n$, такий що $yd = u$. Позначимо $c = yg \in V^n$, тоді

$$cd = ygd = ydg = ug = vd.$$

Отже, $c - v$ є циклом, і існує цикл $z \in Z^n U$, такий, що $[zg] = [c - v]$. Існує $e \in V^{n-1}$, такий, що $zg = c - v + ed$. Елемент e підіймається до $x \in U^{n-1}$, такого, що $xg = e$. Таким чином,

$$yg = c = zg - xgd + v = (z - xd)g + v.$$

Тому $w = y - z + xd$ задовольняє $wg = v$ і $wd = u$. $\square$

Ми говоримо, що M складається з вільних $\Bbbk$-модулів, якщо для будь-якого $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$ градуйований $\Bbbk$-модуль $\mathrm{M}(\mathrm{x})$ вільний - ізоморфний $\oplus_{\mathrm{a}\in\mathbb{Z}} \mathrm{P}^{\mathrm{a}} \Bbbk[\mathrm{a}]$ для деякої градуйованої множини P і $\mathrm{d}_{\mathrm{M}} = 0$.

Proposition

Нехай M складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $\mathrm{d}_{\mathrm{M}} = 0$, $\mathrm{A} \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$ і $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{A}^{\#} \in \mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$. Тоді $\bar{\jmath} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle \in \mathcal{L}_{\mathrm{c}}$.

Доведення. Нехай образ $\mathrm{y}^{\#}$ морфізма $\mathrm{y} : \mathrm{U} \to \mathrm{V} \in \mathcal{C}$ є епіморфізмом і квазіізоморфізмом. Нехай $\mathrm{u} : \mathrm{A} \to \mathrm{U} \in \mathcal{C}$. Морфізми $\mathrm{v} : \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle \to \mathrm{V}$, які роблять квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "\mathrm{u}"] \arrow[d, "\bar{\jmath}"'] & \mathrm{U} \arrow[d, two heads, "\mathrm{y}", "\wr"'] \\ \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle \arrow[r, "\mathrm{v}"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{w}"] & \mathrm{V} \end{tikzcd} \tag{1}$$

комутативним, перебувають в бієкції з елементами $(\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathrm{U} \xrightarrow{\mathrm{y}} \mathrm{V}, \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{t}} \mathrm{V}^{\#}) \in \mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}(\mathrm{V})$. Таким чином,

$$(\mathrm{t})\mathrm{d} = \mathrm{d}_{\mathrm{M}}\mathrm{t} + \mathrm{t}\mathrm{d}_{\mathrm{V}^{\#}} = (\mathrm{M} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{A}^{\#} \xrightarrow{\mathrm{u}^{\#}} \mathrm{U}^{\#} \xrightarrow{\mathrm{y}^{\#}} \mathrm{V}^{\#}).$$

Для деякої градуйованої множини $P = (P^a(s) \mid a \in \mathbb{Z}, s \in S)$, $P^a(s) \in \mathcal{S}\mathsf{et}$, маємо $M = P\Bbbk = \left(\oplus_{a\in\mathbb{Z}} P^a(s)\Bbbk[a]\right)_{s\in S}$. Позначимо обрану базу M через $(e_p)_{p\in P^\bullet(\bullet)}$, $\mathsf{deg}\, e_p = \mathsf{deg}\, p$.
Для довільного $p \in P^a(s)$ позначимо $n = a - 1$. Маємо цикл $e_p\alpha u^\# \in Z^{n+1}(U^\#)$ і елемент $e_p t \in (V^\#)^n$, такий, що $(e_p\alpha u^\#)y^\# = (e_p t)d_{V^\#}$. Завдяки лемі 4 існує елемент, позначений $(e_p r) \in (U^\#)^n$, такий, що $e_p\alpha u^\# = (e_p r)d_{U^\#}$ і $e_p t = (e_p r)y^\#$. Обираючи такий $e_p r$ для усіх $p \in P^\bullet(\bullet)$, ми отримуємо відображення $r \in \underline{\mathsf{dg}}^S(M, U^\#)^{-1}$, таке, що комутують трикутники

$$\begin{tikzcd} A^\# \arrow[r, "u^\#"] & U^\# \\ M \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "(r)d"'] & \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} & U^\# \arrow[d, "y^\#"] \\ M \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "t"] & V^\# \end{tikzcd} .$$

Таким чином, пара $(u : A \to U, r : M \to U^\#) \in h_{A,\alpha}(U)$ визначає морфізм $w : A\langle M, \alpha\rangle \to U \in \mathcal{C}$ за лемою 2.
Віконана рівність

$$u = (A \xrightarrow{\bar{\jmath}} A\langle M, \alpha\rangle \xrightarrow{w} U).$$

Природність бієкції ψ,

$$\begin{tikzcd}
h_{A,\alpha}(U) \arrow[r, "\psi_U", "\sim"'] \arrow[d, "h_{A,\alpha}(U)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{C}(A\langle M,\alpha\rangle, U) \arrow[d, "\mathcal{C}(1,y)"] \\
h_{A,\alpha}(V) \arrow[r, "\psi_V", "\sim"'] & \mathcal{C}(A\langle M,\alpha\rangle, V)
\end{tikzcd}$$

застосовується до пари (u, r) і дає

$$\begin{tikzcd}
(u : A \to U, r : M \to U^{\#}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "(-\cdot y, -\cdot y^{\#})"'] \arrow[dr, phantom, "="] & w \arrow[d, mapsto, "-\cdot y"] \\
(uy : A \to V, ry^{\#} : M \to V^{\#}) = (\bar{\jmath}v, t) \arrow[r, mapsto] & v = wy.
\end{tikzcd}$$

Це дає ще одне рівняння

$$v = (A\langle M,\alpha\rangle \xrightarrow{w} U \xrightarrow{y} V)$$

і w - шуканий діагональний наповнювач для (1). $\square$

Якщо M складається з вільних $\Bbbk$-модулів, (і $\mathrm{d_M}=0$), то $\bar{\jmath}:\mathrm{A}\to\mathrm{A}\langle\mathrm{M},\alpha\rangle$ є кофібрацією. Вона може бути названа елементарною стандартною кофібрацією. Якщо

$$\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2\to\cdots$$

є послідовністю елементарних стандартних кофібрацій, B - це кограниця цієї діаграми, то відображення "нескінченної композиції" $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ є кофібрацією, що називається стандартною кофібрацією [1, Section 2.2.3].

Lemma

Нехай $\alpha\sim\alpha':\mathrm{M}\to\mathrm{A}^{\#}$. Тоді є природна по B біекція $\mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha}(\mathrm{B})\simeq\mathrm{h}_{\mathrm{A},\alpha'}(\mathrm{B})$. Отже, виникає ізоморфізм k представляючих об'єктів, що є останньою стрілкою в рівнянні, яке виконано в $\mathcal{C}$:

$$\bar{\jmath}'=(\mathrm{A}\xrightarrow{\bar{\jmath}}\mathrm{A}\langle\mathrm{M},\alpha\rangle\xrightarrow[\cong]{\mathrm{k}}\mathrm{A}\langle\mathrm{M},\alpha'\rangle).$$

Proposition

Нехай $\mathrm{N} = \mathrm{P}\Bbbk \in \mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$ складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $\mathrm{d}_{\mathrm{N}} = 0$ та $\mathrm{M} = \mathsf{Cone}\, 1_{\mathrm{N}[-1]} = (\mathrm{N} \oplus \mathrm{N}[-1], \mathrm{d}_{\mathsf{Cone}})$. Тоді для будь-якого морфізма $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{UA} \in \mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$ морфізм $\bar{\jmath} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}\langle \mathrm{M}, \alpha \rangle$ - це стандартна кофібрація, композиція двох елементарних стандартних кофібрацій.

Proposition

Нехай $\mathrm{r} : \mathrm{A} \to \mathrm{Y} \in \mathcal{C}$. Позначимо через

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{Z}\,\mathsf{Cone}(\mathrm{r}^{\#}[-1] : \mathrm{A}^{\#}[-1] \to \mathrm{Y}^{\#}[-1]) \\ &= \{(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \in \mathrm{A}^{\#} \times \mathrm{Y}^{\#}[-1] \mid \mathrm{ud} = 0,\ \mathrm{ur}^{\#} - \mathrm{yd}_{\mathrm{Y}^{\#}} = 0\} \end{aligned}$$

диференціально градуйований $\Bbbk$-підмодуль циклів комплекса $\mathsf{Cone}(\mathrm{r}^{\#}[-1])$, $\mathrm{d}_{\mathrm{N}} = 0$.
Позначимо через $\mathsf{pr}_1 : \mathrm{N} \to \mathrm{A}^{\#} \in \mathsf{dg}^{\mathrm{S}}$ (відп. $\mathsf{pr}_2 : \mathrm{N} \to \mathrm{Y}^{\#}[-1] \in \mathsf{gr}^{\mathrm{S}}$) відображення $(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \mapsto \mathrm{u}$ (відп. $(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \mapsto \mathrm{y}\sigma^{-1}$). Позначимо $\mathrm{D} = \mathrm{A}\langle \mathrm{N}, \mathsf{pr}_1 \rangle$. Тоді

$$(\mathrm{r} : \mathrm{A} \to \mathrm{Y}, \mathrm{t} = (\mathrm{N} \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} \mathrm{Y}^{\#}[-1] \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Y}^{\#}))$$

є елементом $\mathrm{h}_{\mathrm{A},\mathsf{pr}_1}(\mathrm{Y})$.
Відповідний морфізм $\mathrm{q} : \mathrm{D} \to \mathrm{Y}$ задовольняє $\mathrm{r} = (\mathrm{A} \xrightarrow{\bar{\jmath}} \mathrm{A}\langle \mathrm{N}, \mathsf{pr}_1 \rangle \xrightarrow{\mathrm{q}} \mathrm{Y})$.

Композиція

$$\beta = \langle \mathrm{N} \hookrightarrow \mathsf{Cone}(\mathrm{r}^{\#}[-1]) \xrightarrow{\mathsf{Cone}(\bar{\jmath}^{\#}[-1],1)} \mathsf{Cone}(\mathrm{q}^{\#}[-1])\rangle,$$
$$\mathsf{Cone}(\bar{\jmath}^{\#}[-1],1) = \begin{pmatrix} \bar{\jmath}^{\#} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

гомотопна нулю, $\beta = (\theta, 0).\mathrm{d} = (\theta, 0) \cdot \mathrm{d}_{\mathsf{Cone}(\mathrm{q}^{\#}[-1])}$, таким чином, всі цикли $\mathsf{Cone}(\mathrm{r}^{\#}[-1])$ переводяться $\mathsf{Cone}(\bar{\jmath}^{\#}[-1], 1_{\mathrm{Y}^{\#}[-1]})$ до меж в $\mathsf{Cone}(\mathrm{q}^{\#}[-1])$.

Доведення твердження 3

Покажемо, що $(\mathrm{r},\mathrm{t}) \in \mathrm{h}_{\mathrm{A},\mathsf{pr}_1}(\mathrm{Y})$. Справді, діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N} \arrow[r, "\mathsf{pr}_2"] \arrow[d, "\mathsf{pr}_1"'] & \mathrm{Y}^{\#}[-1] \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Y}^{\#} \arrow[d, "\mathrm{d}_{\mathrm{Y}^{\#}}"] \\
\mathrm{A}^{\#} \arrow[rr, "\mathrm{r}^{\#}"] & & \mathrm{Y}^{\#}
\end{tikzcd}$$

комутує, як показує обчислення

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{y}\sigma^{-1} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{y} \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{u} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{u}\mathrm{r}^{\#} \arrow[r, equal] & \mathrm{y}\mathrm{d}_{\mathrm{Y}^{\#}}
\end{tikzcd}$$

Відповідний морфізм $\mathrm{q} : \mathrm{D} \to \mathrm{Y}$ задовольняє
$(\mathrm{r},\mathrm{t}) = (\bar{\jmath} \cdot \mathrm{q}, \mathrm{N} \xrightarrow{\theta} \mathrm{D}^{\#} \xrightarrow{\mathrm{q}^{\#}} \mathrm{Y}^{\#})$.

Можна легко перевірити, що конуси пов'язані ланцюговим відображенням

$$\mathsf{Cone}(\bar{\jmath}^{\#}[-1], 1_{\mathrm{Y}^{\#}[-1]}) = \begin{pmatrix} \bar{\jmath}^{\#} & 0 \\ 0 & 1_{\mathrm{Y}^{\#}[-1]} \end{pmatrix} : \\ \mathsf{Cone}((\bar{\jmath}^{\#}\mathrm{q}^{\#})[-1]) \to \mathsf{Cone}(\mathrm{q}^{\#}[-1]).$$

Композиція β переводить $(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \in \mathrm{N}$ до $(\mathrm{u}\bar{\jmath}^{\#}, \mathrm{y}\sigma^{-1}) \in \mathsf{Cone}(\mathrm{q}^{\#}[-1])$. Оскільки $\mathrm{d_N} = 0$, відображення

$$(\theta, 0).\mathrm{d} = (\theta, 0)\begin{pmatrix} \mathrm{d}_{\mathrm{D}^{\#}} & \mathrm{q}^{\#}\sigma^{-1} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{Y}^{\#}[-1]} \end{pmatrix} = (\mathsf{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, \theta\mathrm{q}^{\#}\sigma^{-1}) \\ = (\mathsf{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, \mathrm{t}\sigma^{-1}) = (\mathsf{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, \mathsf{pr}_2)$$

переводить $(\mathrm{u}, \mathrm{y}\sigma^{-1})$ до того ж $(\mathrm{u}\bar{\jmath}^{\#}, \mathrm{y}\sigma^{-1})$, що й β. $\square$

Припустимо, що дотримані умови теореми 1.

Proposition

Нехай $N = P\Bbbk \in \mathsf{dg}^S$ складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $d_N = 0$ та $M = \mathsf{Cone}\, 1_{N[-1]}$. Тоді для всіх $\alpha : M \to A^\# \in \mathsf{dg}^S$ морфізм $\bar{\jmath} : A \to A\langle M, \alpha\rangle$ належить $\mathcal{W}$.

Доведення. Комплекс M є стягуваним, отже, досить припустити, що $\alpha = 0$. Розглянемо спрямовану множину скінченних градуйованих підмножин $Q \subset P$ (тобто множина $\bigsqcup_{c\in\mathbb{Z}}^{x\in S} Q^c(x)$ є скінченною). Ми маємо

$$M[1] = P\mathbb{K}[1] = \bigoplus_{c\in\mathbb{Z}}^{x\in S} P^c(x)\mathbb{K}_x[c+1] = \mathsf{colim}_{Q\subset P} \coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} \mathbb{K}_x[c+1],$$

$$\begin{aligned}
\bar{\jmath}^\# = \mathsf{in}_2^\# &= \langle A^\# \to (F(M[1]) \textstyle\coprod A)^\# \rangle \\
&= \Big\langle A^\# \to \Big(\mathsf{colim}_{Q\subset P}\big(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\big) \coprod A\Big)^\# \Big\rangle \\
&= \Big\langle A^\# \to \mathsf{colim}_{Q\subset P}\Big(\big(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\big) \coprod A\Big)^\# \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Для будь-якого скінченного Q відображення
$\mathsf{in}_2^{\#} : A^{\#} \to \big((\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])) \coprod A\big)^{\#}$ являє собою квазіізоморфізм як скінченна композиція квазіізоморфізмів. Таким чином, його конус є ациклічним. Тому конус

$$\mathsf{Cone}\Big\langle \bar{\jmath}^{\#} : A^{\#} \to \mathsf{colim}_{Q\subset P}\Big(\big(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\big) \coprod A\Big)^{\#}\Big\rangle$$
$$\simeq \mathsf{colim}_{Q\subset P}\,\mathsf{Cone}\Big\langle A^{\#} \to \Big(\big(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\big) \coprod A\Big)^{\#}\Big\rangle$$

є ациклічним і $\bar{\jmath}^{\#}$ - квазіізоморфізм. □

Підсумовуючи твердження 2 та 4, припустимо, що $N \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{dg}^S$ складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $d_N = 0$ та $M = \mathsf{Cone}\, 1_{N[-1]} = (N \oplus N[-1], d_{\mathsf{Cone}})$. Тоді для будь-якого морфізма $\alpha : M \to UA \in \mathsf{dg}^S$ морфізм $\bar{\jmath} : A \to A\langle M, \alpha\rangle$ - тривіальна кофібрація в $\mathcal{C}$ і стандартна кофібрація, композиція двох елементарних стандартних кофібрацій. Він називається стандартна тривіальна кофібрація.

Доведення теореми 1. Функторіальна факторизація на тривіальну кофібрацію та фібрацію

Нехай $f : X \to Y \in \mathcal{C}$. Позначимо $N = Y^{\#}\Bbbk$, $M[1] = \mathsf{Cone}\, 1_{N[-1]} = (N \oplus N[-1], d_{\mathsf{Cone}}) \simeq Y^{\#}\mathbb{K}[-1]$. $\Bbbk$-лінійне відображення $N \to Y^{\#}$, $e_y \mapsto y$, степеня 0 єдиним чином поширюється до постепеневої сюр'єкції $\pi_Y^t : M[1] \to Y^{\#} \in \mathsf{dg}^S$, що визначає морфізм $\pi_Y : F(M[1]) \to Y \in \mathcal{C}$. Поєднуючи його з попереднім, ми отримуємо морфізм $\pi_Y \cup f : F(M[1]) \coprod X \to Y \in \mathcal{C}$.

Оскільки $\pi_Y^t = \langle M[1] \xrightarrow{\eta} (F(M[1]))^{\#} \xrightarrow{\pi_Y^{\#}} Y^{\#} \rangle$ - це сюр'єкція, відображення $\pi_Y^{\#} = \langle (F(M[1]))^{\#} \xrightarrow{\mathsf{in}_1^{\#}} (F(M[1]) \coprod X)^{\#} \xrightarrow{(\pi_Y \cup f)^{\#}} Y^{\#} \rangle$ також є сюр'єкцією. Тому $(\pi_Y \cup f)^{\#}$ є сюр'єкцією і $\pi_Y \cup f \in \mathcal{R}_f$. Розклад

$$f = (X \xrightarrow{\bar{\jmath}} X\langle M, 0\rangle = F(M[1]) \coprod X \xrightarrow{(\pi_Y \cup f)^{\#}} Y)$$

на тривіальну кофібрацію і фібрацію функторіальний по f.

Функторіальна факторизація на кофібрацію та тривіальну фібрацію

Побудуємо індуктивно наступну діаграму в $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] & D_0 \arrow[r, "h_0"] \arrow[drr, "f=q_0"'] & D_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "q_1"] & D_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "q_2\ \dots"] & \dots \\ & & & Y & \end{tikzcd} \tag{2}$$

так щоб всі h_i були кофібраціями.

Для даного q_n з $n \geq 0$ позначимо

$$\begin{aligned} N_n &= Z\,\mathsf{Cone}(q_n^{\#}[-1] : D_n^{\#}[-1] \to Y^{\#}[-1]) \\ &= \{(u, y\sigma^{-1}) \in D_n^{\#} \times Y^{\#}[-1] \mid ud = 0,\ uq_n^{\#} - yd_{Y^{\#}} = 0\} \end{aligned}$$

як у твердженні 3. Будучи підмножиною циклів, N_n є градуйованим $\Bbbk$-підмодулем з $d_{N_n} = 0$. Розглядаючи N_n як градуйовану множину, введемо градуйований $\Bbbk$-модуль $M_n = N_n\Bbbk$, $d_{M_n} = 0$, з проекцією $p_n : M_n \longrightarrow N_n \in \mathsf{dg}^S$, $e_v \mapsto v$ для усіх $v \in N_n^{\bullet}(\bullet)$.

Позначимо $\alpha_n = (M_n \xrightarrow{p_n} N_n \xrightarrow{\mathsf{pr}_1} D_n^{\#}) \in \mathsf{dg}^S$. Виберемо $D_{n+1} = D_n\langle M_n, \alpha_n\rangle$, тоді $h_n = D_n\langle 0\rangle : D_n \to D_{n+1}$ є кофібрацією. З твердження 3 випливає, що $(q_n : D_n \to Y, t_n = (M_n \xrightarrow{p_n} N_n \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} Y^{\#}[-1] \xrightarrow{\sigma} Y^{\#})$ є елементом $h_{D_n,\alpha_n}(Y)$.

Морфізм $q_{n+1} : D_{n+1} = D_n\langle M_n, \alpha_n\rangle \to Y \in \mathcal{C}$ відповідає парі (q_n, t_n), такій, що $q_n = (D_n \xrightarrow{h_n} D_{n+1} \xrightarrow{q_{n+1}} Y)$ в $\mathcal{C}$, що дає необхідну діаграму.

Доведемо що $q_2^{\#} : D_2^{\#} \to Y^{\#}$ є сюр'єктивним у всіх степенях. Нехай $y \in Y^{\#\bullet}(\bullet)$. Тоді $(0, yd\sigma^{-1}) \in N_0$, $e_{(0,yd\sigma^{-1})} \in M_0$, $e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 \in D_1^{\#}$. З рівняння $\theta_0 q_1^{\#} = t_0 = p_0 \cdot \mathsf{pr}_2 \cdot \sigma : M_0 \to Y^{\#}$ випливає, що

$$e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 q_1^{\#} - yd_{Y^{\#}} = (0, yd\sigma^{-1})\,\mathsf{pr}_2\,\sigma - yd = 0.$$

Крім того,

$$\begin{aligned} e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 d_{D_1^{\#}} = e_{(0,yd\sigma^{-1})}.(\theta)d = e_{(0,yd\sigma^{-1})}\alpha_0\bar{\imath}_0\eta g_0^{\#} \\ = (0, yd\sigma^{-1})\,\mathsf{pr}_1\,\alpha_0\bar{\imath}_0\eta g_0^{\#} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, $(e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0, y\sigma^{-1}) \in N_1$. Тому відображення $\mathsf{pr}_2 \cdot\sigma : N_1 \to Y^\#$ є сюр'єктивним в кожному степені. Отже, відображення $t_1 = (M_1 \xrightarrow{p_1} N_1 \xrightarrow{\mathsf{pr}_2} Y^\#[-1] \xrightarrow{\sigma} Y^\#)$ також є сюр'єктивним. Оскільки $t_1 = (M_1 \xrightarrow{\theta_1} D_2^\# \xrightarrow{q_2^\#} Y^\#)$, з цього випливає, що $q_2^\#$ є сюр'єктивним в кожному степені. Отже $q_n^\# : D_n^\# \to Y^\#$ є сюр'єктивним для всіх $n \geq 2$ та індуковане відображення $q^\# : D^\# \to Y^\#$ є сюр'єктивним також, де

$$q = \mathsf{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, q_n : D = \mathsf{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, D_n \to Y.$$

Діаграма (2) також індукує діаграму конусів

$$\mathsf{Cone}\, q_0^\# \xrightarrow{\mathsf{Cone}(h_0^\#,1)} \mathsf{Cone}\, q_1^\# \to \cdots \to \mathsf{Cone}\, q^\# = \mathsf{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, \mathsf{Cone}\, q_n^\#.$$

З твердження 3 випливає, що підмодуль циклів $Z\,\mathsf{Cone}\, q_n^\#$ переводиться відображенням $\mathsf{Cone}(h_n^\#, 1)$ до підмодуля меж $B\,\mathsf{Cone}\, q_{n+1}^\#$. Таким чином, когранниця конусів $\mathsf{Cone}\, q^\#$ є ациклічною. Тому $q^\#$ - квазіізоморфізм.
Ми розклали морфізм $f \in \mathcal{C}$ в стандартну кофібрацію i і тривіальну фібрацію q: $f = (X \xrightarrow{i} D \xrightarrow{q} Y)$. □

- Vladimir Hinich, Homological algebra of homotopy algebras, Comm. Algebra 25 (1997), no. 10, 3291–3323, arXiv:q-alg/9702015. §2
- В. В. Любашенко, Модельна структура на категоріях пов'язаних з категоріями комплексів, Український математичний журнал 72 (2020), no. 2, 232–244, http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/682. T1.2, §2
- Saunders Mac Lane, Categories for the working mathematician, GTM, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971, 1988. §II.7
- Gonçalo Tabuada, Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), no. 1, 15–19, arXiv:math.KT/0407338.