1. Правила Фейнмана в КЕД

Для вільного поля Дірака генеруючий функціонал має вигляд

$$Z_0(\bar{\eta},\eta) = N\int \mathcal{D}\Psi\,\mathcal{D}\bar{\Psi}\exp\left\{i\int d^4x\,[\bar{\Psi}(x)(i\hat{\partial}_x - m)\Psi(x) + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta]\right\}, \tag{1.1}$$

де нормуючий множник

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\Psi\,\mathcal{D}\bar{\Psi}\exp\left\{i\int d^4x\,[\bar{\Psi}(x)(i\hat{\partial}_x - m)\Psi(x)]\right\} = \mathrm{Det}(i\hat{\partial} - m).$$

Здійснюючи інтегрування по грасмановим змінним, отримуємо

$$Z_0(\bar{\eta},\eta) = \exp\{-i\bar{\eta}[i\hat{\partial} - m]^{-1}\eta\} = \exp\left\{-i\int d^4x\,d^4y\,\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)]\right\}, \tag{1.2}$$

де

$$\langle x|\frac{1}{i\gamma^\mu\partial_\mu - m}|y\rangle \equiv S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{\hat{p} - m + i\varepsilon}. \tag{1.3}$$

З одного боку друга похідна функціоналу є

$$\left.\frac{\delta^2 Z_0(\bar{\eta},\eta)}{\delta\bar{\eta}(x)\delta\eta(y)}\right|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)|0\rangle \equiv \overbracket{\Psi(x)\bar{\Psi}}(y), \tag{1.4}$$

а з іншого, обчислюючи безпосередньо варіаційні похідні Z_0 в (1.2), знаходимо співвідношення

$$\langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)|0\rangle = iS(x-y). \tag{1.5}$$

Тоді можна записати

$$Z_0(\bar{\eta},\eta) = \exp\left[-\int d^4x\,d^4y\,\bar{\eta}(x)\langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)|0\rangle\eta(y)\right]. \tag{1.6}$$

Обчислимо 4-х точкову функцію Гріна

$$\left.\frac{\delta^4 Z_0(\bar{\eta},\eta)}{\delta\bar{\eta}(x_1)\delta\bar{\eta}(x_2)\delta\eta(x_3)\delta\eta(x_4)}\right|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \langle 0|T\Psi(x_1)\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_3)\bar{\Psi}(x_4)|0\rangle. \tag{1.7}$$

Обчислюючи варіаційні похідні Z_0, знаходимо:

$$\langle 0|T\Psi(x_1)\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_3)\bar{\Psi}(x_4)|0\rangle = -\langle 0|T\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_3)|0\rangle\langle 0|T\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_4)|0\rangle$$
$$+\langle 0|T\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_4)|0\rangle\langle 0|\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_3)|0\rangle$$
$$= -\overbrace{\Psi(x_1)\bar{\Psi}}(x_3)\overbrace{\Psi(x_2)\bar{\Psi}}(x_4) + \overbrace{\Psi(x_1)\bar{\Psi}}(x_4)\overbrace{\Psi(x_2)\bar{\Psi}}(x_3). \tag{1.8}$$

Це є теорема Віка для ферміонних подів (з врахуванням знаків для ферміонов). Звернемо увагу, що немає спарюваннь типу $\overbrace{\Psi\Psi}$ або $\overbrace{\bar{\Psi}\bar{\Psi}}$ внаслідок відсутності відповідних квадратичних доданків в лагранжіані. Це є вірним для квантової електродинаміки, але такі спарювання можливі в інших теоріях, наприклад, в теорії надпровідності.

Генеруючий функціонал в КЕД в довільній коваріантній калібровці є:

$$Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Psi\, \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp\Big\{ i \int d^4x [-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$$
$$+ \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta] \Big\}, \tag{1.9}$$

де коваріантна похідна $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ і N— відповідний нормуючий множник. В лагранжіані виділимо квадратичну по полям частину, і частину, що відповідає за взвємодію $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - eA_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$. Квадратична частина для калібрувального поля має вигляд

$$\int d^4x \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]$$
$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2\xi}\partial^\mu A_\mu \partial^\nu A_\nu\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x \left[A_\nu \Box A^\nu - A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{\xi}A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu \left[g^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right] A_\nu$$
$$\equiv \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, A_\mu(x)(D_0^{-1})^{\mu\nu}(x-y)A_\nu(y), \tag{1.10}$$

де очевидно

$$(D_0^{-1})^{\mu\nu}(x-y) = \left[g^{\mu\nu}\Box - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]_x \delta(x-y). \tag{1.11}$$

Повний фотонний пропагатор

$$\left.\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_\mu(x) i\delta J_\nu(y)}\right|_{J=\bar\eta=\eta=0} = \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle.$$

Нехай $D_0^{\mu\nu}(x-y)$ задовольняє рівнянню

$$\left[g^{\mu\nu}\Box_x - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_x^\mu\partial_x^\nu\right] D_{0\nu\lambda}(x-y) = \delta^\mu_\lambda \delta(x-y). \tag{1.12}$$

В імпульсному просторі маємо матричне рівняння

$$\left[-g^{\mu\nu}k^2 + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right] D_{0\nu\lambda}(k) = \delta^\mu_\lambda, \tag{1.13}$$

розв'язком якого є

$$D_{0\nu\lambda}(k) = -\frac{1}{k^2}\left(g_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2}\right) - \xi\frac{k_\nu k_\lambda}{k^4}. \tag{1.14}$$

Генеруючий функціонал для вільного електромагнітного поля:

$$\begin{aligned} Z_0(J_\mu) &= N\int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J_\mu(x) D_0^{\mu\nu}(x-y) J_\nu\right\}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

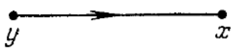
Тоді для вільного поля маємо

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \frac{\delta^2 Z_0}{i\delta J_\mu(x) i\delta J_\nu(y)} = iD_0^{\mu\nu}(x-y), \tag{1.16}$$

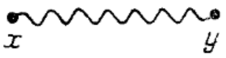
і для функціоналу $Z_0(J)$:

$$Z_0(J) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle J^\nu(y)\right\}. \tag{1.17}$$

Поставимо у відповідність вакуумним середнім $\langle 0|T\Psi\bar{\Psi}|0\rangle$ і $\langle 0|TA_\mu A_\nu|0\rangle$ лінії



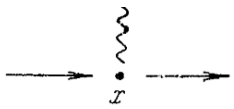
$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip(x-y)}}{\hat{p}-m+i\varepsilon} = \langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(y)|0\rangle, \qquad (1.18)$$



$$= \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{ik^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \qquad (1.19)$$

Лінії показують рух частинок (електронів і фотонів) з точки y в точку x. Для ферміонного пропагатора стрелка на лінії означає, що електрон народжується в точці y, рухається в точку x, де він зникає. Це у відповідності з тим, що оператор $\bar{\Psi}(y)$ містить оператор народження електрона, а оператор $\Psi(x)$— оператор знищення електрона. Звісно, можна казати, що ферміонний пропагатор описує рух позітрона з точки x в точку y, тоді стрелка буде мати зворотній напрям. Це справа угоди (convention), який напрямок вказувати на ферміонній лінії. Для фотонного пропагатора стрелка звичайно не вказується, тому що оператор фотонного поля A_μ містить оператори народження і знищення фотона.

Вершині співставимо точку

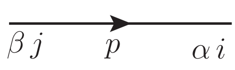


$$= -ie\gamma_\mu \int d^4x. \qquad (1.20)$$

По координатам вершин проводяться інтегрування. Чудово, що симетрійні коефіцієнти в КЕД дорівнюють 1 для всіх діаграм, крім вакуумних.

В імпульсному просторі співставляємо:

1. ферміонному пропагатору

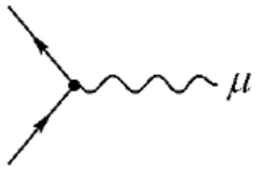


$$= \frac{i}{\hat{p}-m+i\varepsilon}, \qquad (1.21)$$

2. фотонному пропагатору

$$= \frac{1}{i(k^2+i\epsilon)}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\epsilon}\right), \qquad (1.22)$$

3. вершині



$$= -ie\gamma^\mu \qquad . \qquad (1.23)$$

4. Множник (-1) для кожної ферміонної петлі (появу цього множника пояснимо трохи пізніше).

1.1. Фейнмановські правила в квантовій хромодинаміці

Лагранжева густина квантової хромодинаміки в коваріантній калібровці має вигляд

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{\eta}^a\partial^\mu D^{ab}_\mu \eta^b + \bar{\Psi}^\alpha_i(i\gamma^\mu D^{\alpha\beta}_\mu - m_i)\Psi^\beta_i, \quad (1.24)$$

де тензор напруженності

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \qquad (1.25)$$

і коварінтні похідні

$$D^{ab}_\mu = \partial_\mu \delta^{ab} + gf^{abc}A^c_\mu, \qquad (1.26)$$

$$D^{\alpha\beta}_\mu = \partial_\mu \delta^{\alpha\beta} + igA^a_\mu (T^a)^{\alpha\beta}. \qquad (1.27)$$

Для кольорової групи $SU(3)$ індекси пробігають значення: $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ і $a, b, c = 1, \ldots, 8$. Розіб'ємо лагранжеву густину на дві частини $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 +$

$\mathcal{L}_{int}$, де $\mathcal{L}_0$ — квадратична частина, яка визначає пропагатори теорії. Приймаючи до уваги, що

$$F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 - 4gf^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^b_\mu A^c_\nu + g^2 f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^d_\mu A^e_\nu, \quad (1.28)$$

квадратична частина лагранжіана квантової хромодинаміки запишеться

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \bar{\eta}^a \partial^\mu \partial_\mu \eta^a + \bar{\Psi}^\alpha_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i)\Psi^\alpha_i. \quad (1.29)$$

Для взаємодії $\mathcal{L}_{int}$ маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= gf^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b}A^{\nu c} - \frac{g^2}{4}(f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)(f^{ade}A^{d\mu}A^{e\nu}) \\ &- g\bar{\eta}^a \partial^\mu (f^{abc}A^c_\mu \eta^b) - g\bar{\Psi}^\alpha_i \gamma^\mu A^a_\mu (T^a)^{\alpha\beta}\Psi^\beta_i. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Запишемо

$$\begin{aligned} \exp i\int d^4x\, \mathcal{L}_0(x) = \exp\Bigg\{ - \int d^4x \Bigg[-\frac{i}{2}A^a_\mu \delta^{ab}\Bigg(\Box g^{\mu\nu} - \Bigg(1 - \frac{1}{\xi}\Bigg)\partial^\mu \partial_\nu\Bigg) A^b_\nu \\ + i\bar{\eta}^a \delta^{ab}\Box \eta^b - i\bar{\Psi}^\alpha_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i)\Psi^\alpha_i \Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

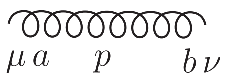
Пропагатори є оберненими до диференціальних операторів в квадратичній формі в експоненті. Для пропагаторів глюонів, кварків і духів знаходимо, відповідно:

$$\langle 0|TA^a_\mu(x)A^b_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\delta^{ab}\left[\frac{1}{ip^2}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\right], \quad (1.32)$$

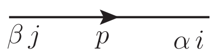
$$\langle 0|T\Psi_{i\alpha}(x)\bar{\Psi}_{j\beta}(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\frac{i}{\hat{p} - m}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, \quad (1.33)$$

$$\langle 0|T\eta^a(x)\bar{\eta}^b(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\delta^{ab}\frac{i}{p^2}. \quad (1.34)$$

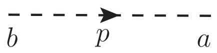
В імпульсному просторі пропагаторам співставляються лінії:



$$= \frac{\delta^{ab}}{ip^2}\left(g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right), \tag{1.35}$$



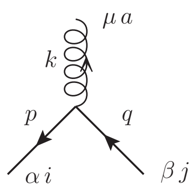
$$= \frac{i\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}}{\hat{p} - m}. \tag{1.36}$$



$$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2}. \tag{1.37}$$

По домовленності ферміонні лінії направляємо від $\bar{\Psi}$ к Ψ і від $\bar{\eta}$ к η .

Доданок $\mathcal{L}_{int}$, що відповідає за взвємодію, дає вершини. Для кварк-глюонної вершини в імпульсному просторі маємо



$$= -ig\gamma^\mu (T^a)^{\alpha\beta}\delta_{ij}. \tag{1.38}$$

У вершині стоять матриці, які діють на спінорні, кольорові і ароматні індекси кварків. Закон збереження 4-х імпульсів у вершині вимагає, щоб сума імпульсів, які входять дорівнює сумі імпульсів, які виходять.

Розглянемо вершину взаємодії глюонів з духами. В дії iS для доданку

$$ig\int d^4x(\partial^\mu\bar{\eta}^a(x))f^{abc}A^c_\mu(x)\eta^b(x) \tag{1.39}$$

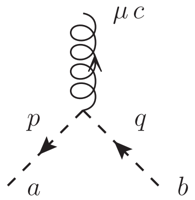
виконуємо Фурье-перетворення для полів

$$\begin{aligned} &ig\int d^4x\left(\partial^\mu_x\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ipx}\bar{\eta}^a(p)\right)f^{abc}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}A^c_\mu(k)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iqx}\eta^b(q) \\ &= \int\frac{d^4p\,d^4k\,d^4q}{(2\pi)^{12}}(-gp^\mu)f^{abc}\bar{\eta}^a(p)A^c_\mu(k)\eta^b(q)(2\pi)^4\delta(p+k-q). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Для вершини взаємодії глюонів з духами в імпульсному просторі маємо

$$-gf^{abc}p_\mu(2\pi)^4\delta(p+k-q). \tag{1.41}$$

Оскільки $\bar{\eta}^a(p)$ відповідає духовій лінії, яка входить, то саме вона переносить імпульс, виникаючий при диференціюванні, що іноді позначається крапкою біля цієї лінії. Графічне зображення цієї вершини дивись на Рис.1.42.



$$-gf^{abc}p_\mu(2\pi)^4\delta(p+k-q). \tag{1.42}$$

Розглянемо тепер потрійну вершину взаємодії глюонів, де також зробимо Фурье-перетворення для полів:

$$\begin{aligned}
& ig\, f^{abc}\int d^4x\, \partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b}A^{\nu c} = igf^{abc}\int d^4x \left(\partial^x_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}A^c_\nu(k)\right) \\
& \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ipx}A^{\mu b}(p)\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{iqx}A^{\nu c}(q) \\
& = -gf^{abc}\!\int \frac{d^4k\, d^4p\, d^4q}{(2\pi)^{12}}k_\mu \delta^{\nu\lambda}A^a_\nu(k)A^{b\mu}(p)A^{c\lambda}(q)(2\pi)^4\delta(k+p+q).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

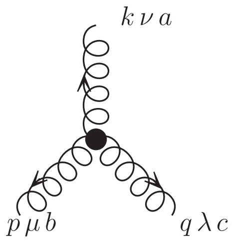
Виконаємо симетрізацію по індексам $(k,a,\nu),(p,b,\mu),(q,c,\lambda)$, використовуючи той факт що вираз (1.43) не змінюється при таких замінах:

$$\begin{aligned}
f^{abc}k_\mu\delta_{\nu\lambda} \quad & \Rightarrow \quad \frac{1}{2}[f^{abc}k_\mu\delta_{\nu\lambda}+f^{bac}p_\nu\delta_{\mu\lambda}] \\
& \Rightarrow \quad \frac{1}{2}[f^{cba}q_\mu\delta_{\lambda\nu}+f^{bca}p_\lambda\delta_{\mu\nu}] \\
& \Rightarrow \quad \frac{1}{2}[f^{acb}k_\lambda\delta_{\nu\mu}+f^{cab}q_\nu\delta_{\lambda\mu}].
\end{aligned} \tag{1.44}$$

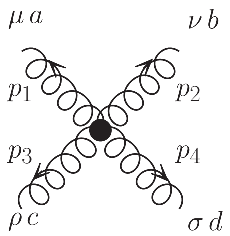
При отриманні першого виразу ми зробили симетрізацію по індексам $(k,a,\nu) \Leftrightarrow (p,b,\mu)$, потім для отримання другого виразу з першого — заміну $(k,a,\nu) \Rightarrow (q,c,\lambda)$, і третього виразу з першого — $(p,b,\mu) \Rightarrow (q,c,\lambda)$. Складаючи ці вирази і ділячи на три отримуємо в інтегралі (1.43) фактор

$$-\frac{g}{3!}f^{abc}[(k-q)_\mu\delta_{\nu\lambda}+(p-k)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(q-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}](2\pi)^4\delta(p+k+q). \tag{1.45}$$

Тут ми вибрали всі імпульси, які виходять. Для трьох- і чотирьохглюонних вершин маємо вирази



$$-gf^{abc}[(k-q)_\mu g_{\nu\lambda}+(q-p)_\nu g_{\lambda\mu}+(p-k)_\lambda g_{\mu\nu}](2\pi)^4\delta(p+k+q), \tag{1.46}$$



$$\begin{aligned} = -\, ig^2 \big[& f^{abc} f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade} f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\big]\,(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3+p_4). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Графічне зображення приведено в (1.46) і (1.47).

При практичних обчисленнях встановлені вище правила необхідно доповнити:

1. Інтегрування по нефіксованим імпульсам з мірою $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.
2. Фактори симетрії.
3. Множники (-1) для кожной духової і ферміонної петлі.