

## 1. Функціонально - диференціальне рівняння для $Z(J)$

В даному розділі введемо функціонально - диференціальне рівняння для генеруючого функціоналу  $Z(J)$  на прикладі скалярного поля з лагранжевої густиною

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}} = -\frac{1}{2}\Phi(\square + m^2)\Phi - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4. \quad (1.1)$$

Спочатку отримуємо таке рівняння у випадку вільного скалярного поля ( $\lambda = 0$ ), для якого генеруючий функціонал нам відомий

$$Z_0(J) = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right]. \quad (1.2)$$

Обчислимо варіаційну похідну

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_0(J) = \int d^4y D_c(x-y) J(y) \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4u d^4v J(u) D_c(u-v) J(v) \right]. \quad (1.3)$$

Діючи оператором  $(\square + m^2)_x$ , отримуємо

$$(\square + m^2)_x \frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_0(J) = J(x) Z_0(J). \quad (1.4)$$

Це і є функціонально - диференціальне рівняння для  $Z_0(J)$ . Отримуємо аналогічне рівняння для  $Z(J)$ . Для виведення рівняння використовуємо той факт, що функціональний інтеграл від повної похідної по полю дорівнює нулю:

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} e^{iS[\Phi] + i \int d^4x J(x)\Phi(x)} = 0. \quad (1.5)$$

Це вірно, як для інтегралів по звичайним, так і по грасмановим змінним.

Диференціюючи експоненту, маємо

$$\int \mathcal{D}\Phi \left[ -(\square_x + m^2)\Phi(x) + \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{вз}}}{\delta\Phi(x)} + J(x) \right] e^{iS(\Phi) + i \int d^4x J(x)\Phi(x)} = 0. \quad (1.6)$$

Поля в квадратних дужках замінимо на похідні за джерелами,

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J(x)}. \quad (1.7)$$

Отримуємо функціонально - диференціальне рівняння для  $Z(J)$ :

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta Z(J)}{i\delta J(x)} - \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{вз}}(\Phi(x))}{\partial \Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)=\frac{\delta}{i\delta J(x)}} Z(J) = J(x)Z(J). \quad (1.8)$$

Очевидно, що для  $\mathcal{L}_{\text{вз}} = 0$  це рівняння зводиться до рівняння для  $Z_0(J)$ .

Покажемо тепер, що розв'язком цього рівняння є

$$Z(J) = N \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{вз}} \left( \frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] Z_0(J), \quad (1.9)$$

де  $N$  — нормуючий множник. Доведення очевидно з функціонального інтеграла, де в  $\mathcal{L}_{\text{вз}}(\Phi)$  робимо заміну (1.7).

Таким чином,

$$Z(J) = N \exp \left[ i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{вз}} \left( \frac{\delta}{i\delta J(y)} \right) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right], \quad (1.10)$$

$$N^{-1} = \exp \left[ i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{вз}} \left( \frac{\delta}{i\delta J(y)} \right) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0}. \quad (1.11)$$

Генеруючий функціонал будемо рахувати, розкладаючи  $\exp(i \int \mathcal{L}_{\text{вз}})$  в ряд по константі зв'язку  $\lambda$ . Для виразу (1.10) в першому порядку по  $\lambda$  маємо

$$\left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left( \frac{\delta}{i\delta J(z)} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right]. \quad (1.12)$$

Треба порахувати четверту варіаційну похідну:

$$\frac{\delta}{i\delta J(z)} \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right] = \int d^4y D_c(z-y) J(y) \exp[\dots], \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^2 Z_0(J) = \left\{ \frac{1}{i} D^c(0) + \left[ \int d^4 y D^c(z-y) J(y) \right]^2 \right\} Z_0(J), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^3 Z_0(J) &= \left\{ \frac{1}{i} D_c(0) + \left[ \int D_c(z-y) J(y) dy \right]^2 \right\} \\ &\quad \times \int d^4 y D_c(z-y) J(y) Z_0(J) \\ &\quad + 2 \frac{1}{i} D_c(0) \int d^4 y D_c(z-y) J(y) Z_0(J) \\ &= \left\{ -3i D_c(0) \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^3 \right\} Z_0(J), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 Z_0 &= \left\{ -3i D_c(0) \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^2 + \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^4 \right. \\ &\quad \left. - 3 D_c^2(0) + \frac{3}{i} D_c(0) \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^2 \right\} Z_0(J) \\ &= \left\{ -3 D_c^2(0) - 6i D_c(0) \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int d^4 y D_c(z-y) J(y) \right]^4 \right\} Z_0(J). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Можна представити у вигляді діаграм на Рис.1.

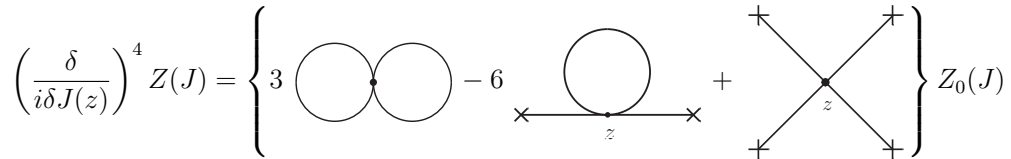
$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 Z(J) = \left\{ 3 \text{ (two circles)} - 6 \text{ (circle with line)} + \text{ (cross)} \right\} Z_0(J)$$


Рис. 1. Четверта похідна функціоналу  $Z_0(J)$ .

Правила відповідності графічних зображень аналітичним виразам представлені на Рис.2. Коефіцієнти 3, 6, 1 (симетричні коефіцієнти) отримують

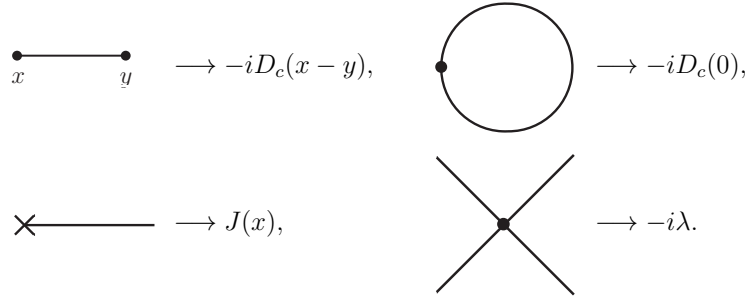


Рис. 2. Правила відповідності.

ються з досить простих міркувань симетрії. 1-й доданок впливає з 3-го в результаті з'єднання двох пар ліній; таких способів 3. Другий доданок отримується з'єднанням будь-яких двох ліній 3-го доданка; таких можливостей шість ( $\frac{4!}{2!2!} = 6$ ). Перший граф — вакуумні діаграми. Функціонал  $Z(J)$  приймає вигляд зображений на Рис.3. В першому порядку по  $\lambda$  має-

$$Z(J) = \frac{\left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left\{ 3 \text{ (diagram)} - 6 \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \right\} Z_0(J) \right]}{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left( 3 \text{ (diagram)} \right)}$$

Рис. 3. Функціонал  $Z(J)$ .

мо вираз представлений на Рис.4.

$$Z(J) = \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left\{ -6 \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} \right\} Z_0(J) \right]$$

Рис. 4. Функціонал  $Z(J)$  без вакуумних діаграм.

Відзначимо, що вакуумна діаграма зникла. Це ж буде і у всіх порядках теорії збурень. Відсутність вакуумних діаграм — властивість нормованих генеруючих функціоналов.

Двоточкова функція Гріна (пропагатор).

Як ми знаємо, варіаційні похідні генеруючого функціоналу дають повні функції Гріна

$$\frac{\delta^n Z(J)}{i\delta J(x_1) \dots i\delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_n) | 0 \rangle \equiv G(x_1, \dots, x_n), \quad (1.17)$$

які не містять внески від вакуумних діаграм. Функціонал  $Z(J)$  можна розкласти у функціональний ряд Тейлора

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (1.18)$$

Для двоточної функції, диференціюючи рівняння зображене на Рис.4, отримуємо

$$G(x_1, x_2) = -iD_c(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} (-iD_c(0)) \int d^4z (-iD_c(x_1 - z)) (-iD_c(z - x_2)). \quad (1.19)$$

Це рівняння представлено графічно на Рис.5.



Рис. 5. Поправка другого порядку до пропагатора скалярного поля.

Для функції  $D_c$  використовуємо її Фур'є перетворення

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} - \frac{i\lambda}{2} iD_c(0) \int d^4z \\ &\quad \times \int \frac{d^4p d^4k}{(2\pi)^8} \frac{e^{-ip(x_1-z) - ik(z-x_2)}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)(m^2 - k^2 - i\epsilon)} \\ &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1-x_2)} \left[ \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \frac{(i\lambda/2)D_c(0)}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

У підсумку

$$\begin{aligned}
G(x_1 - x_2) &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[ 1 - \frac{(i\lambda/2)D_c(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
&\approx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + (i\lambda/2)D_c(0) + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Повна функція Гріна також залежить від різниці аргументів, що природно внаслідок трансляційної інваріантності. Також, у другій рівності ми приц-няли до уваги, що розрахунки зроблені в першому порядку по константі взаємодії  $\lambda$ . Для Фур'є образу маємо

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + (i\lambda/2)D_c(0) + i\epsilon}, \tag{1.22}$$

який має полюс при

$$p^2 = m_r^2 = m^2 - (i\lambda/2)D_c(0) \equiv m^2 + \delta m^2. \tag{1.23}$$

Бачимо, що доданок до квадрата маси

$$\delta m^2 = -\frac{i\lambda}{2}D_c(0) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{1.24}$$

квадратично розбігається. Тут ми вперше зустрічаємося з розбіжностями в квантовій теорії поля. Була розроблена теорія перенормувань, яка усуває ці розбіжності і дозволяє проводити розрахунки по теорії збурень в деяких теоріях— так званих перенормованих теоріях поля. Це буде предметом подальшого вивчення.

Ми можемо тепер сформулювати правила Феймана для запису аналітичних виразів діаграм в імпульсному просторі, які зображені на Рис.6. Кожній внутрішній лінії, вершині і зовнішній лінії відповідають аналітичні вирази. Крім того, в кожній вершині повинен виконуватись закон збереження 4-х імпульсу. По імпульсу петлі ведеться інтегрування. На додаток,

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}; \\
 \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} &= -i\lambda; \\
 \bullet \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= e^{-ip \cdot x};
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Правила Феймана для скалярної теорії в імпульсному просторі.

кожна діаграма має симетрійний коефіцієнт (надалі буде більше про ці коефіцієнти). За допомогою правил Феймана ми можемо відразу записати аналітичний вираз для пропагатора скалярної частинки в першому порядку по константі взаємодії  $\lambda$ :

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{-i\lambda}{2} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.25)$$

Можна перевірити, що це співпадає з Фур'є перетворенням першої строки в (1.21).

### 1.1. Генеруючий функціонал для зв'язних діаграм

Як ми знаємо, що функціонал  $Z(J)$  породжує функції Гріна, які не містять внески від вакуумних діаграм. Визначимо тепер новий функціонал  $W(J)$  наступним чином

$$Z(J) = e^{iW(J)} \quad \Rightarrow \quad W(J) = -i \ln Z(J). \quad (1.26)$$

Для перших похідних функціоналу  $W(J)$  знаходимо

$$\frac{\delta W}{\delta J(x_1)} = -i \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}. \quad (1.28)$$

Тоді, якщо

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J} \right|_{J=0} = 0,$$

маємо співвідношення

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = iG(x_1, x_2). \quad (1.29)$$

Для похідних від  $W(J)$  більш високого порядку співвідношення будуть складніші. Функціонал  $W(J)$  розкладемо у функціональний ряд

$$W(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (1.30)$$

звідки коефіцієнти ряду

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (1.31)$$

визначають нові функції Гріна. Ці функції Гріна мають важливу характеристику: вони не містять незв'язаних компонент, тобто  $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  є зв'язаними функціями Гріна (цей факт буде проілюстрований пізніше).

## 1.2. Теорема Віка для скалярних полів.

Генеруючий функціонал для вільного скалярного поля має вигляд

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi) + \Phi J]\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi)\}} \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_c(x-y) J(y) \right\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$



звідки

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z(J)}{i\delta J(x)i\delta J(y)} \Big|_{J=0} &= \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x)\Phi(y) \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_0(\Phi)]\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi)\}} \\ &= \langle 0|T\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)|0\rangle = -iD_c(x-y). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для зручності можна записати

$$Z_0(J) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^2x d^4y J(x)\langle 0|T\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)|0\rangle J(y) \right]. \quad (1.34)$$

Для чотирьохточкової функції Гріна отримуємо

$$\begin{aligned} \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\dots\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle &= \left( \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_4)} \right) Z_0(J) \Big|_{J=0} \\ &= -[D_c(x_1-x_2)D_c(x_3-x_4) + D_c(x_1-x_3)D_c(x_2-x_4) + D_c(x_1-x_4)D_c(x_2-x_3)] \\ &= \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)|0\rangle\langle 0|T\hat{\Phi}(x_3)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle + \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_3)|0\rangle\langle 0|T\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle \\ &\quad + \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle\langle 0|T\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)|0\rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Введемо позначення

$$\overline{\Phi(x_1)\Phi(x_2)} = \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)|0\rangle, \quad (1.36)$$

яке називається спарюванням. Тоді (1.35) запишеться як

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_2\hat{\Phi}_3\hat{\Phi}_4\}|0\rangle &\equiv \langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle = \\ &\overline{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}\overline{\Phi(x_3)\Phi(x_4)} + \overline{\Phi(x_1)\Phi(x_3)}\overline{\Phi(x_2)\Phi(x_4)} + \overline{\Phi(x_1)\Phi(x_4)}\overline{\Phi(x_2)\Phi(x_3)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ми отримали, що чотирьохточкова функція дорівнює сумі добутків усіх спарювань. Незалежні перестановки називаються згортками, і ми запишемо це як

$$\langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)\hat{\Phi}(x_4)|0\rangle = \sum_{\text{згортки}} \prod \overline{\Phi(x_i)\Phi(x_j)}. \quad (1.38)$$

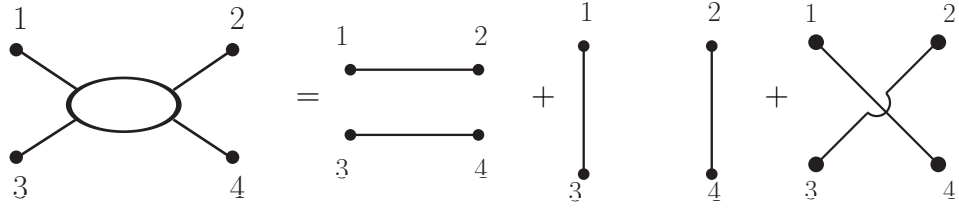


Рис. 7. Теорема Віка для чотирьохточкової функції Гріна вільного поля.

Графічне зображення представлено на Рис.7 де лінії співставляється спарювання  $\overline{\Phi_i \Phi_j}$ . Це є не що інше, як теорема Віка. Теорема є вірною для довільного числа полів

$$\overline{\Phi \Phi_1 \cdots \Phi_n \Phi'} = (\pm 1)^n \overline{\Phi \Phi'} \Phi_1 \cdots \Phi_n. \quad (1.39)$$

При підрахунку спарювань оператори полів треба поставити рядом, і для цього прокомутувати оператори під знаком хронологічного упорядкування. Знак плюс в (1.39) відноситься до бозонних полів, в той час як знак мінус відповідає випадку ферміонних полів, де треба враховувати антикомутативність полів. Оскільки  $\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle = 0$  для вільного поля, то нетривіальними будуть тільки спарювання для  $2n$ -точкових функцій Гріна  $\langle 0 | T \hat{\Phi}_1 \dots \hat{\Phi}_{2n} | 0 \rangle$ . Легко підрахувати, що загалом в сумі добутоків спарювань скалярних полів буде  $(2n - 1)!!$  доданків (випадок ферміонних полів розглянемо пізніше

## 2. Діаграми Фейнмана в скалярній теорії

Кореляційних функцій типу  $\langle 0 | T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) | 0 \rangle$  одержуються з генеруючого функціоналу за допомогою диференціювання за джерелом. Інший, більш зручний, спосіб обчислення кореляційних функцій — це використання теореми Віка.

В теорії із взаємодією обчислення функціонального інтеграла виконується по теорії збурень, тобто записуємо  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$  і розкладаємо

$$e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left[ 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{int} + \frac{i^2}{2!} \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\Phi(x)) \times \int d^4y \mathcal{L}_{int}(\Phi(y)) + \dots \right]. \quad (2.1)$$

Наприклад, в теорії скалярного поля із взаємодією  $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \Phi^4$  обчислимо знов повний пропагатор в порядку  $\lambda$ :

$$G(x_1, x_2) = \langle 0 | T \Phi(x_1) \Phi(x_2) | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \Phi(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0(x)} \times \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \Phi^4(z) + \dots \right]. \quad (2.2)$$

До кожного доданка в квадратних дужках застосуємо теорему Віка.

$$G(x_1, x_2) = N \left\{ \overline{\Phi_1 \Phi_2} + 3 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \overline{\Phi_1 \Phi_2} \int d^4z \overline{\Phi(z) \Phi(z)} \overline{\Phi(z) \Phi(z)} + 12 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \overline{\Phi(x_1) \Phi(z)} \overline{\Phi(x_2) \Phi(z)} \overline{\Phi(z) \Phi(z)} \right\}. \quad (2.3)$$

При обчисленні доданка пропорційного  $\lambda$  загалом отримуємо 15 стортков, але тільки дві з них різні з коефіцієнтами 3 і 12. Нагадаємо, що

$$N^{-1} = 1 - 3 \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \overline{\Phi(z) \Phi(z)} \overline{\Phi(z) \Phi(z)} = 1 + \frac{1}{8} \infty, \quad (2.4)$$

де другий доданок являє собою вакуумну діаграму, яка пропорційна чотиридимірному об'єму  $\int d^4z$ , оскільки спарювання  $\overline{\Phi(z) \Phi(z)} = -iD_c(0)$  не залежить від  $z$ . Аналогічний внесок вакуумної діаграми присутній в другому доданку в (2.3). Ці суто вакуумні внески скорочуються у відношенні в (2.3). Скорочення вакуумних внесків має місце в довільному порядку теорії збурень, і відображає той факт, що функції Гріна одержуються з функціоналу  $Z(J)$ , який нормований на одиницю при  $J = 0$ .

Відповідне графічне зображення пропагатора  $G(x_1, x_2)$  представлено на Рис.8 в порядках  $\lambda$  і  $\lambda^2$  разом з ваговими коефіцієнтами.

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G_c(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & \text{---} \cdot \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \circ \text{---} \\
 & + \frac{1}{4} \text{---} \circ \circ \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}
 \end{aligned}$$

Рис. 8. Зв'язана двоточкова функція Гріна скалярних полів (пропагатор) в порядку  $\lambda^2$ .

Остаточно, правила Фейнмана у координатному просторі

1. Для пропагатора— лінія з точками на кінцях:  $\overline{\Phi(x)\Phi(y)} = \langle 0|T\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(y)|0\rangle$ .
2. Для кожної вершини:  $(-i\lambda) \int d^4z$ .
3. Для кожної зовнішньої точки: 1.
4. Поділити на порядок симетрії діаграми  $S$ .

З кожною діаграмою асоціюється множник  $1/S$ , де  $S$  — коефіцієнт симетрії данної діаграми, тобто число способів перестановок компонент діаграми, які не змінюють саму діаграму. Підрахунок порядку симетрії діаграми  $S$  проілюстрований на Рис.9.

В якості приклада на Рис.2.5 приведені внески в чотирьохточкову незв'язану функцію Гріна в порядку  $\lambda^2$ .

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4|0\rangle = & \text{---} + | \quad | + \times + \underline{\circ} + \text{---} | + \dots \\
 & + \times + \text{---} | + \underline{\circ\circ} + \dots \\
 & + \text{---} \times + \dots + \text{---} \times + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

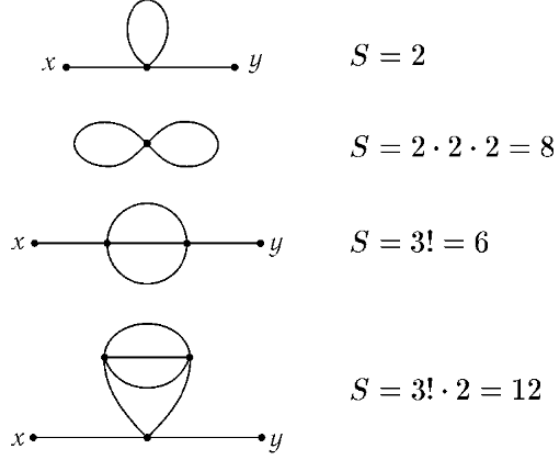


Рис. 9. Порядок симетрії діаграми  $S$ .

В функцію Гріна

$$(-i)^3 \frac{\delta^4 W(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 | 0 \rangle_c \quad (2.6)$$

внески дають тільки зв'язані діаграми з приведених на Рис.2.5.

### 2.1. Правила Феймана в імпульсному просторі.

Від аналітичних виразів для діаграм Феймана в конфігураційному просторі можна перейти до відповідних виразів в імпульсному просторі, роблячи Фур'є перетворення. Простіше одразу сформулювати правила Феймана в імпульсному просторі. В конфігураційному просторі пропагатор визначається аналітичним виразом

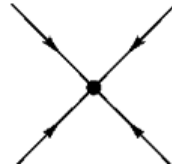
$$\langle 0 | T \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (= -iD_c(x-y)). \quad (2.7)$$

1. Пропагатору в імпульсному просторі співставляється лінія який відповідає вираз

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Напрямок імпульса довільний внаслідок симетрії згортки для скалярних полів:  $\overline{\Phi(x)\Phi(y)} = \overline{\Phi(y)\Phi(x)}$ .

2. Вершина



$$= -i\lambda. \quad (2.9)$$

В результаті інтегрування по координатам  $z$  вершини, виникає закон збереження енергії–імпульсу, який виражається у присутності в вершині дельта-функції:

$$\int d^4z e^{-ip_1z} e^{-ip_2z} e^{-ip_3z} e^{-ip_4z} = (2\pi^4)\delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4).$$

$\delta$ -функції дозволяють зняти ряд інтегрувань по імпульсам, залишаючи тільки інтегрування по імпульсах, не фіксованих законом збереження (це в петльових діаграмах). Тому вимагається закон збереження імпульсу в кожній вершині.

3. Інтегрувати по кожному незафіксованому законом збереження імпульсу:  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ .

4. Поділити на множник симетрії  $S$  даної діаграми.