1. Рівняння руху і симетрії функцій Гріна в функціональному формалізмі

Класичні рівняння руху і закони збереження випливають із лагранжіана та його симетрій, тому їх можна вивести і безпосередньо із функціонального інтегралу. Це приводить до деяких саіввідношень між функціями Гріна (рівняння Швінгера-Дайсона) та квантового узагальнення теореми Нетер (аналог тотожностей Уорда-Такахаші) для будь-якої симетрії квантової теорії поля.

1.1. Рівняння руху

Розглянемо спочатку, наприклад, трьохточкову функцію Гріна теорії вільного скалярного поля,

$$\langle 0|T\hat{\Phi}(x_1)\hat{\Phi}(x_2)\hat{\Phi}(x_3)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\Phi)}\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)}{\int \mathcal{D}\Phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\Phi)}}, \tag{1.1}$$

з лагранжевою густиною

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2. \tag{1.2}$$

[Надалі, для спрощення запису будемо опускати значок $\hat{}$ над операторами середніх по вакууму.] В класичній теорії рівняння руху виводяться із вимоги, щоб дія було незмінною в результаті нескінченно малої варіації

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x) + \varepsilon(x). \tag{1.3}$$

Узагальнення на квантовий випадок полягає в тому, щоб розглядати цю варіацію як заміну змінних у функціональному інтеграле, що, звичайно, не змінює значення самого інтеграла. Міра при зсуві не міняється $\mathcal{D}\Phi' = \mathcal{D}\Phi$, тоді маємо

$$\int \mathcal{D}\Phi \, e^{iS(\Phi)}\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) = \int \mathcal{D}\Phi' e^{iS(\Phi')}\Phi'(x_1)\Phi'(x_2)\Phi'(x_3). \tag{1.4}$$

В першому порядкі по ε, находимо

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi\, e^{iS(\Phi)} \left\{ \left(i \int d^4x\, \varepsilon(x)[(-\Box_x - m^2)\Phi(x)] \right) \Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) \right.$$
$$\left. + \varepsilon(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + \Phi(x_1)\varepsilon(x_2)\Phi(x_3) + \Phi(x_1)\Phi(x_2)\varepsilon(x_3) \right\}. \qquad (1.5)$$

Останні доданки можна скомбінувати, якщо записати

$$\varepsilon(x_1) = \int d^4x\, \varepsilon(x)\delta(x - x_1).$$

Прирівнюючи нулю вирази при $\varepsilon(x)$, находимо

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi\, e^{iS(\Phi)} \left[(\Box_x + m^2)\Phi(x)\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) + i\delta(x - x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3) \right.$$
$$\left. + i\delta(x - x_2)\Phi(x_1)\Phi(x_3) + i\delta(x - x_3)\Phi(x_1)\Phi(x_2) \right]. \qquad (1.6)$$

Виносячи оператор диференціювання за знак інтеграла, останній вираз можна записати як співвідношення між кореляційними функціями

$$(\Box_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle = -i\delta(x - x_1)\langle 0|T\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle$$
$$-i\delta(x - x_2)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_3)|0\rangle - i\delta(x - x_3)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle. \qquad (1.7)$$

Для двухточкової функції Гріна (беремо $\Phi(x_1)$ замість $\Phi(x_2)\Phi(x_3)$) це очевидно дає

$$(\Box_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1)|0\rangle = -i\delta(x - x_1), \qquad (1.8)$$

тобто кореляційона функція задовольняє рівнянню Клейна – Гордона крім точки, де аргументи полей співпадають. Ця модифікація рівняння Клейна – Гордона в точці x_1 називається контактним доданком і це призвело до рівняння для функції Гріна на які діє оператор Клейна – Гордона. У загальному випадку n-точкової функції Гріна рівняння типу (1.6) дає наступне співвідношення

$$(\Box_x + m^2)\langle 0|T\Phi(x)\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)|0\rangle =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\langle 0|T\Phi(x_1)\ldots(-i\delta(x-x_i))\ldots\Phi(x_n)|0\rangle, \qquad (1.9)$$

тобто в квантовій теорії рівняння класичної теорії поля задовольняються всіма кореляційними функціями з точністю до контактних доданків.

Зазвичай це виводиться в гамільтоновому формалізмі шляхом обчислення обох сторін співідношення по теоремі Віка (δ - функції виникають при диференцюванні T добутків по часу).

У випадку теорії із взаємодією аналогічні дії дають тотожність

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi\, e^{iS(\Phi)}\Big\{ i\int d^4x\, \varepsilon(x)\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\left(\int d^4x'\mathcal{L}(\Phi)\right)\Phi(x_1)\Phi(x_2)$$
$$+ \varepsilon(x_1)\Phi(x_2) + \Phi(x_1)\varepsilon(x_2)\Big\}. \qquad (1.10)$$

Так як

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\int d^4x'\mathcal{L}(\Phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right) = \frac{\delta S}{\delta\Phi(x)},$$

то приходимо до набору тотожностей

$$\langle 0|T\left(\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\int d^4x'\mathcal{L}(\Phi)\right)\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)|0\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\langle 0|T\Phi(x_1)\ldots(i\delta(x-x_i))\ldots\Phi(x_n)|0\rangle. \qquad (1.11)$$

Ми отримали квантові рівняння руху для всіх функцій Гріна, які містять відповідні контактні доданки. Вони називаються рівняннями Швінгера – Дайсона (ШД). Вивід рівнянь ШД легко узагальнюється на довільні кореляційні функції,

$$\langle 0|TX[\Phi]|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi X[\Phi]e^{iS(\Phi)}}{\int \mathcal{D}\Phi\, e^{iS(\Phi)}} = \frac{\int \mathcal{D}\Phi X[\Phi+\epsilon]e^{iS(\Phi+\epsilon)}}{\int \mathcal{D}\Phi\, e^{iS(\Phi)}}. \qquad (1.12)$$

Розкладаючи у функціональний ряд по $\epsilon(x)$, аналогічно вище наведеним викладкам, отримуємо загальне співвідношення

$$\langle 0|T\frac{\delta S(\Phi)}{\delta\Phi(x)}X[\Phi]|0\rangle = i\langle 0|T\frac{\delta X[\Phi]}{\delta\Phi(x)}|0\rangle. \tag{1.13}$$

Легко бачити, що якщо

$$X[\Phi] = \Phi(x_1)\Phi(x_1)\dots\Phi(x_n), \tag{1.14}$$

то ми приходимо до рівняння (1.11).

2. Закони збереження

Теорема Нетер в класичній теорії говорить, що кожній симетрії лагранжіана (дії) відповідає струм, що зберігається. Звичайно ми розглядаємо симетрії, на мові групових перетворень

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = U\Phi(x) = e^{i\omega^a T^a}\Phi(x) \approx (1 + i\omega^a T^a)\Phi.$$

Розглянемо комплексне скалярне поле

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi.$$

Наявна інваріантність відносно фазових перетворень $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ з постійною фазою, якої відповідає струм

$$j_\mu(x) = i\Phi^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\Phi = i(\partial_\mu\Phi^*\Phi - \Phi^*\partial_\mu\Phi). \tag{2.1}$$

У функціональному інтегралі розглянемо нескінчено малу заміну змінних відповідного до фазового $U(1)$ перетворення

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x) + i\alpha(x)\Phi(x), \tag{2.2}$$

де тепер α - параметр, який залежить від x. Міра не меняється, так як це унітарне перетворення.

Тоді, наприклад,

$$\int\mathcal{D}\Phi\, e^{i\int d^4x\mathcal{L}[\Phi]}\Phi(x_1)\Phi^*(x_2) = \int\mathcal{D}\Phi\, e^{i\int d^4x\mathcal{L}[\Phi']}\Phi'(x_1)\Phi^{*\prime}(x_2)\Big|_{\Phi'=(1+i\alpha)\Phi}. \quad (2.3)$$

В першому порядку по α находимо

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathcal{D}\Phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}[\Phi]} \Big\{ i \int d^4x[(\partial_\mu\alpha)i(\Phi\partial^\mu\Phi^* - \Phi^*\partial^\mu\Phi)] \\ \times\ \Phi(x_1)\Phi^*(x_2) + [i\alpha(x_1)\Phi(x_1)]\Phi^*(x_2) + \Phi(x_1)[-i\alpha(x_2)\Phi^*(x_2)]\Big\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Відзначимо, що варіація лагранжіана пропорційна $\partial_\mu\alpha$, так як підстановка з постійними α залишає лагранжіан інваріантним. Інтегруя по частинам і прирівнюючи коефіцієнти при $\alpha(x)$, находимо (після поділу на Z) співвідношення між кореляційними функціями

$$\begin{aligned} \partial^\mu\langle Tj_\mu(x)\Phi(x_1)\Phi^*(x_2)\rangle = \delta(x-x_1)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi^*(x_2)|0\rangle \\ - \delta(x-x_2)\langle 0|T\Phi(x_1)\Phi^*(x_2)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Це можна назвати квантовим законом збереження, тобто, симетрія лагранжіана відображається у вигляді співвідношень між кореляційними функціями модифікованих контактними доданками.

2.1. Загальний випадок

Нехай маємо набір полів Φ_a з деяким лагранжіаном $\mathcal{L}[\Phi]$. Розглянемо інфінетезімальне перетворення

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) + \varepsilon\Delta\Phi(x),$$

де ε — інфінетезімальний параметр, $\Delta\Phi$ — деформація поля. Перетворення буде перетворенням симетрії, якщо воно залишає інваріантним рівняння руху. Це буде у випадку інваріантності дії. Для лагранжіана дозволяється дівергентний доданок, тому що в дії він має вигляд поверхневого доданку, який не впливає на вивід рівнянь руху. Тобто, лагранжіан має бути інваріантним з точністю до дивергенції деякого вектора:

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu J^\mu(x). \tag{2.6}$$

Варіацію лагранжіана внаслідок варіації полів,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(\varepsilon \Delta\Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu(\partial_\mu \Phi)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\Phi), \tag{2.7}$$

перепишем як

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \varepsilon \Delta\Phi \right) + \varepsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right] \Delta\Phi. \tag{2.8}$$

Для розв'язків рівнянь Ейлера-Лагранжа другий доданок обертається в нуль, і повну варіацію можна записати як

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu J^\mu, \tag{2.9}$$

допускаючи її у формі дивергенції деякого вектора J^μ. Останній вираз запишимо як

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{2.10}$$

тобто збереження струму

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \Delta\Phi - J^\mu. \tag{2.11}$$

Кожній неперервній симетрії лагранжіана відповідає свій струм, що зберыгаэться. Це є теорема Нетер для класичної теорії поля. Інтегруючи (2.10) по тривимірному об'єму, одержимо збереження у часі заряду

$$Q = \int d^3x \, j^0(x). \tag{2.12}$$

У функціональному інтегралі ми розглядаємо заміни змінних параметром $\varepsilon(x)$: $\Phi_a \to \Phi'_a = \Phi_a + \varepsilon\Delta\Phi_a$. Тоді для варіації лагранжіана

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\varepsilon\Delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\Phi_a) \\ &= \varepsilon\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_a}\Delta\Phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\partial_\mu(\Delta\Phi_a)\right] + \partial_\mu\varepsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\Delta\Phi_a. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Вираз у квадратних дужках відповідає випадку, коли параметр ϵ постійний, тобто, його можна записати як дивергенцію деякого струму J^μ внаслідок інваріантності лагранжіана (для внутрішніх симетрій $J^\mu = 0$). Таким чином, останній вираз запишеться

$$\varepsilon\partial_\mu J^\mu - \varepsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)}\Delta\Phi_a\right) = -\varepsilon(x)\partial_\mu j^\mu(x). \tag{2.14}$$

Це означає, що дивергенцію струму, що зберігається, можна знайти з варіації дії:

$$\frac{\delta}{\delta\varepsilon(x)}\int d^4x\mathcal{L}[\Phi_a + \varepsilon(x)\Delta\Phi_a]\Big|_{\epsilon=0} = -\partial_\mu j^\mu(x). \tag{2.15}$$

Так же як і у вільному випадку, отримуємо співвідношення для кореляційних функцій взаємодіючих теорій, які мають симетрії,

$$\begin{aligned}\langle\partial_\mu j^\mu(x)\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)\rangle = &- i[\delta(x-x_1)\langle\Delta\Phi_a(x_1)\Phi_b(x_2)\rangle \\ &+ \langle\Phi_a(x_1)\Delta\Phi_b(x_2)\rangle\delta(x-x_2)],\end{aligned} \tag{2.16}$$

де відповідний струм знаходиться за формулою (2.15).