## 1. Спонтанне порушення симетрії

Розглянемо лагранжеву густину дійсного взаімодіючого скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{1.1}$$

яке має дискретну симетрію відносно заміни $\phi \to -\phi$. Основний стан відповідає значенню поля $\phi = 0$. По теорії збурень маємо взаємодіюче поле з квадратом маси $m^2$. Зробимо заміну

$$m^2 \to -\mu^2.$$

Гамільтоніан буде мати вигляд

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right], \tag{1.2}$$

де потенційна функція

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{1.3}$$

має мінімуми при двох значеннях поля

$$\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu. \tag{1.4}$$

$\phi_0$ — вакуумне середне поля $\phi$. Розкладемо поблизу одного із мінімумов

$$\phi(x) = v + \sigma(x), \tag{1.5}$$

лагранжева густина перепишеться

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^6 + const \tag{1.6}$$

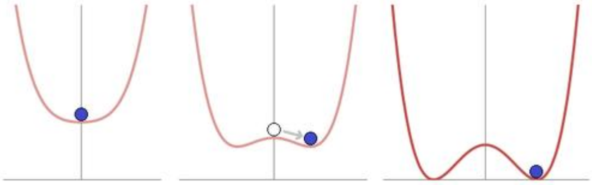

Рис. 1. Спонтанне порушення симетрії в двохямному потенціалі.

Лагранжіан описує скалярне поле масою $\sqrt{2}\mu$ із взаємодіями $\sigma^3$ і $\sigma^4$. Симетрія відносно зміни знака поля, $\sigma \to -\sigma$, тепер відсутня. Тобто, маємо ситуацію, коли вихідний лагранжіан і гамільтоніан мають симетрію, але вибір конкретного розв'язку рівнянь руху порушує цю симетрію. Це явище називається спонтанним порушенням симетрії.

## 2. Лінійна $\sigma$-модель

Розглянемо тепер теорію з $N$ скалярними полями

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.1}$$

яка має неперервну симетрію відносно перетворень

$$\phi^i \to R^{ij}\phi^j$$

з будь-якою ортогональною ($RR^T = 1$) матрицею $R$. Тобто маємо неперервну групу симетрії $O(N)$. Мінімуму потенціалу

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}\left[(\phi^i)^2\right]^2, \tag{2.2}$$

зображеному на Рис.2, відповідає конфігурація поля

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \tag{2.3}$$

Але це рівняння фіксує тільки довжину вектора $\phi^i$, а його напрямок за-

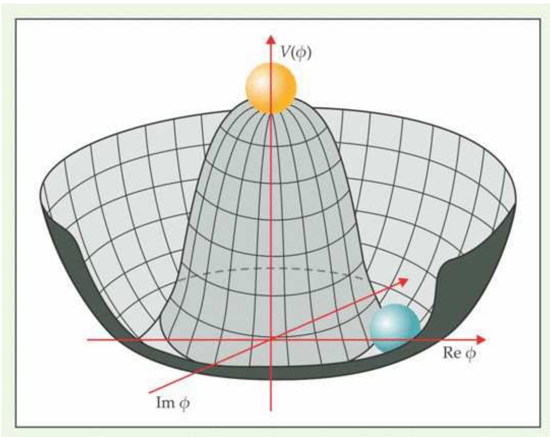


Рис. 2. Спонтанне порушення неперервної симетрії.

лишається довільним. Виберемо вектор $\phi_0^i$ вздовж $N$-го напрямку

$$\phi_0^i = (0, 0, \ldots, v), \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.4}$$

Визначимо

$$\phi^i(x) = (\pi^k(x), v + \sigma(x)), \quad k = 1, \ldots, N-1, \tag{2.5}$$

де поля $\pi^k(x)$ і $\sigma(x)$ описують відхилення (флуктуації) від основного стану (для застосування до піонів $N = 4$, а поля $\pi^k(x)$ і $\sigma(x)$ відповідають триплету піонів і сигма частинці).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3$$
$$- \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{1}{4}\left[(\pi^k)^2\right]^2 . \qquad (2.6)$$

Отримуємо масивне поле $\sigma$ і $N-1$ безмасових полів $\pi$. Симетрія $O(N)$ порушена до $O(N-1)$ оскільки поля $\pi^k(x)$ входять у вигляді квадрата довжини $(\pi^k(x))^2$.

### 3. Теорема Голдстоуна

Як бачимо, спонтанне порушення неперервної симетрії супроводжується появою безмасових частинок. Число таких безмасових частинок пов'язано з числом порушених генераторів симетрії. Дійсно, для групи $O(N)$ число генераторів $\frac{N(N-1)}{2}$. Обрахуємо число порушених симетрій

$$\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N-1.$$

Число порушених симетрій співпадає з числом безмасових частинок — це є твердження теореми Голдстоуна.

Безмасові поля, які виникають в результаті спонтанного порушення неперервної симетрії, називаються голстоуновськими бозонами (голстоунами). Боголюбовська мода при спонтанному порушенні симетрії в теорії конденсованих середовищ — це є також прояв теореми Голдстоуна.

#### 3.1. Загальне доведення теореми Голдстоуна

Доведемо цю теорему у загальному випадку коли лагранжева густина має вигляд

$$\mathcal{L} = (\text{доданки з похідними}) - V(\phi) \qquad (3.1)$$

і є інваріантною відносно деякої неперервної симетрії. Нехай $\phi_0^a$ — конфігурація поля, мінімізуюча потенційну функцію $V(\phi)$:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V|_{\phi^a=\phi_0^a} = 0. \tag{3.2}$$

Розкладемо $V(\phi)$ в околі цієї точки

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^a(\phi-\phi_0)^b \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^a\partial\phi^b}\right)_{\phi_0} + \dots \tag{3.3}$$

Коефіцієнт при квадратичному доданку,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^a\partial\phi^b}\right)_{\phi_0} = m_{ab}^2, \tag{3.4}$$

буде симетричною матрицею, власні значення якої дорівнюють квадратам мас полів, і вони всі більше або дорівнюють нулю, так как $\phi_0$ — мінімум.

Довільне перетворення неперервної симетрії має вигляд

$$\phi^a \to \phi + \alpha\Delta^a(\phi),$$

де $\alpha$ — нескінчено малий параметр, $\Delta^a(\phi)$ — деяка функція всіх $\phi$. Обмежимся глобальними симетріями, коли групові перетворення не залежать від координат. Інваріантність потенціалу виражається в рівності

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha\Delta^a(\phi)), \tag{3.5}$$

або

$$\Delta^a(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi^a}V = 0. \tag{3.6}$$

Продиференцуємо по $\phi^b$ і покладемо $\phi = \phi_0$:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial\Delta^a(\phi)}{\partial\phi^b}\right)_{\phi_0}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi^a}\right)_{\phi_0}}_{=0} + \Delta^a(\phi_0)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^a\partial\phi^b}\right)_{\phi_0} = 0. \tag{3.7}$$

Якщо перетворення не змінює $\phi_0$ (тобто, основний стан симетрічний), то $\Delta^a(\phi_0) = 0$, і співідношення тривіально.

Спонтанно порушена симетрія — це коли $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$, тобто основний стан змінюється при деяких перетвореннях. Але тоді $\Delta^a(\phi_0)$ є вектор із власним значенням нуль матриці $m^2_{ab}$. Таких векторов рівно стільки, скільки є порушених симетрій, тобто перетворень, змінюючих вакуум. Теорема доведена.

### 4. Ефективна дія

Бажано мати функцію типа $V$ в класичній теорії, мінімум якої давал би середне по вакууму квантового поля $\langle 0|\phi|0\rangle$. Така функція і буде називається ефективним потенціалом.

Розглянемо приклад із статистики для системи спінів у зовнішньому магнітному полі $H$. Вільна енергія Гельмгольца $F(H)$ знаходиться із статистичної суми

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}(s) \exp\left[-\beta \int dx (\mathcal{H}(s) - \mathbf{Hs}(x))\right].$$

де $\beta = 1/k_B T$ пов'язано з температурою, $\mathcal{H}(s)$ — густина енергії спінів. Намагніченість визначається як похідна вільної енергії

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{H}}\bigg|_{\beta=const} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \ln Z = \frac{1}{Z}\int dx \int \mathcal{D}\mathbf{s}\, \mathbf{s}(x) \exp\left[-\beta \int dx (\mathcal{H}(s) - \mathbf{Hs})\right] \\ &= \int dx \langle \mathbf{s}(x)\rangle_{\mathbf{H}} \equiv \mathbf{M}(\mathbf{H}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Як відомо, при температурі нижче точки Кюрі намагніченість залишається скінченою навіть при виключному магнітному полі, $\mathbf{H} \to 0$, і має місце спонтанне порушення симетрії відносно поворотів у просторі. Співвідношення

$$-\frac{\partial F(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} = \mathbf{M}(\mathbf{H}) \tag{4.2}$$

використуємо, щоб знайти магнітне поле як функцію намагніченності $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{M})$. Вільна енергія Гіббса $G(\mathbf{M})$ як функція намагніченності визначається за допомогою перетворенняя Лежандра

$$G(\mathbf{M}) = F(\mathbf{H}) + \mathbf{M}\mathbf{H}, \quad G = G(\mathbf{M}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{M}). \tag{4.3}$$

Тоді

$$\frac{\partial G(\mathbf{M})}{\partial M_i} = \frac{\partial F(\mathbf{H})}{\partial M_i} + M_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} + H_i = \frac{\partial F}{\partial H_j}\frac{\partial H_j}{\partial M_i} + M_j \frac{\partial H_j}{\partial M_i} + H_i = H_i, \tag{4.4}$$

де ми використали співвідношення (4.2). Якщо $\mathbf{H} = 0$, тоді вільна енергія досягає екстремума при відповідному значенні намагніченності $\mathbf{M}$,

$$\frac{\partial G(\mathbf{M})}{\partial M_i} = 0. \tag{4.5}$$

Термодинамічно стабільний стан відповідає мінімуму вільної енергії Гіббса $G(\mathbf{M})$ як функції намагніченності.