1. Рівняння ренормалізаційної групи

Розглянемо голий пропагатор $G(x-y) = \langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle$. Його Фур'є перетворення має вигляд

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_B - \Sigma(p)}, \tag{1.1}$$

де $\Sigma(p)$ власна енергія електрона. Останню після виделення розбіжних частин запишемо

$$\Sigma(p) = B\hat{p} - A + \Sigma_f(p). \tag{1.2}$$

Зробимо наступні точні перетворення

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{\hat{p}(1-B) - (m_B - A) - \Sigma_f(p)} = \frac{1}{1-B}\frac{i}{\hat{p} - \frac{m_B - A}{1-B} - \Sigma_f(p)} \\ &= \frac{Z_2 i}{\hat{p} - m - \Sigma_2(p)}, \quad Z_2 = \frac{1}{1-B}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ми маємо зв'язок між "голою"(затравочною) масою m_B і скінченою масою електрона m у вигляді

$$m = \frac{m_B - A}{1-B} \quad \Rightarrow \quad m_B = (mZ_2^{-1} + A. \tag{1.4}$$

В свою чергу "голий"і скінчений (перенормований) пропагатори зв'язані мультиплікативно

$$G(p) = Z_2 G_r, \qquad G_r = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma_r(p)}. \tag{1.5}$$

Як відомо, процедура виделення розбіжностей в (1.2) не є однозначною, вона залишає невизначеними скінчені константи, які можна віднести до скінченої величини $\Sigma_f(p)$. Довільні константи, які з'являються в G_r, можна зафіксувати умовами нормування

$$G_r(p) \sim \frac{i}{\hat{p} - m}, \qquad \hat{p} \to m. \tag{1.6}$$

Тобто, ці константи фіксуються із умови поведінки перенормованого пропагатора поблизу полюса в точці $\hat{p} = m$ з лишком =і, де m є фізична маса електрона.

Умови нормування легше всього сформулювати на мові одночастинково-незвідних (ОЧН) функцій Гріна, які визначаються як сума діаграм, які не можна розбити на дві частини, розрізая одну лінію, крім того, всі зовнішні лінії вважаються видаленими (ампутованими). Наприклад, для $G(p)$ за визначенням маємо

$$-i\Gamma^{(2)}(p) = G^{-1}(p) \cdot G(p) \cdot G^{-1}(p) = G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - (-i)\Sigma(p). \quad (1.7)$$

Аналогічно, для ампутованого фотонного пропагатора

$$\begin{aligned} -i\Gamma^{(2)}_{\mu\nu}(k) &= D^{-1}_{\mu\lambda}(k) D^{\lambda\rho}(k) D^{-1}_{\rho\nu} = D^{-1}_{\mu\nu}(k) \\ &= i(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)(1 + \Pi(k^2)) + \frac{i}{\xi} k_\mu k_\nu, \end{aligned} \quad (1.8)$$

і для вершини

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p'). \quad (1.9)$$

Зв'язок перенормованих і неперенормованих функцій Гріна тоді дається

$$\Gamma^{(2)}(p) = Z_2^{-1} \Gamma_r^{(2)}(p), \quad (1.10)$$

$$\Gamma^{(2)}_{\mu\nu}(p) = Z_3^{-1} \Gamma^{(2)}_{r\mu\nu}(p), \quad (1.11)$$

$$\Gamma_\mu(p, p') = Z_1^{-1} \Gamma_{r\mu}(p, p'). \quad (1.12)$$

Довільні константи в Γ_r можна зафіксувати умовами нормування.

Нормування по Дайсону: для ферміонної ОЧН функції покладемо

$$\Gamma_r^{(2)}(\hat{p})\Big|_{\hat{p}=m} = G_r^{-1}(p)\Big|_{\hat{p}=m} = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \Gamma_r^{(2)}(\hat{p})}{\partial \hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m} = 1, \quad (1.14)$$

для вершинної функції

$$\Gamma_r^\mu(p,p)\Big|_{\hat{p}=m} = \gamma^\mu. \tag{1.15}$$

Довільну константу у фотонній функції $\Gamma^{(2)}_{\mu\nu}(k)$ фіксуємо із умови

$$\Pi_r(0) = 0. \tag{1.16}$$

Використовуючи зв'язок з неперенормовані функціями Гріна, можна звідси визначити константи нормування Z_i, голу m_B, і голий заряд e_B. Наприклад, із (1.10), використовуючи (1.13),

$$\Gamma^{(2)}(\hat{p}=m) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{p} - m_B - \Sigma(p))\Big|_{\hat{p}=m} = 0, \tag{1.17}$$

знаходимо голу масу як функцію фізичних маси і заряда $m_B = m_B(m, e, \mu, n)$, а також масового параметра μ і розмірності n (в розмірної регуляризації). Також із (1.10), використовуючи (1.14), знаходимо константу Z_2:

$$\frac{\partial\Gamma^{(2)}(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m} = 1 - \frac{\partial\Sigma(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m} = Z_2^{-1}(m,\mu,e,n), \tag{1.18}$$

Константа Z_1 знаходиться з (1.12) і (1.15)

$$\Gamma_\mu(p,p)\Big|_{\hat{p}=m} = \gamma_\mu Z_1^{-1}. \tag{1.19}$$

Для константи Z_3 і голого заряда отримуємо

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi(0), \tag{1.20}$$

$$e_B = \frac{Z_1\mu^{2-n/2}}{Z_2 Z_3^{1/2}}\, e = Z_3^{-1/2}\, e\, \mu^{2-n/2}. \tag{1.21}$$

Використовують і інші умови нормування, наприклад в евклідової області в точці $p^2 = -\mu^2$.

В загальному випадку для ОЧН (1PI) функцій Гріна маємо

$$\Gamma^{(n_e+n_\gamma=n)}(p_1,\ldots,p_n,e_B,m_B,n) = Z_2^{-n_e/2} Z_3^{-n_\gamma/2}\Gamma_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n;e_r,m_r,\mu,n), \tag{1.22}$$

де n_e — число зовнішніх ферміонних ліній, n_γ — число зовнішніх фотонних ліній. Ренормовані функції $\Gamma_r^{(n)}(p_1, \ldots, p_n; e_r, m_r, \mu, n)$ скінченні, коли розмірність простору-часу $n \to 4$). Неперенормовані функції Гріна не залежать від параметра μ, в той час як перенормовані функції Гріна Γ_r залежать від μ як явно, так і неявно через перенормовані заряд e_r і масу m_r, які в загальному випадку довільної ренормалізаційної схеми відрізняються від таких саме параметрів в схемі перенормування за Дайсоном. Тому, очевидно, справедливо

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n, e_B, m_B, n) = 0, \tag{1.23}$$

і диференцюючи рівність (1.22) по μ, беручи до уваги, що залежність від μ міститься в константах Z_i, параметрах e_r, m_r, і явним чином в $\Gamma_r^{(n)}$, отримуємо

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_2^{-n_e/2}\right) Z_3^{-n_\gamma/2} \Gamma_r + Z_2^{-n_e/2} \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_3^{-n_\gamma/2}\right) \Gamma_r + Z_2^{-n_e/2} \cdot Z_3^{-n_\gamma/2} \cdot \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r = 0, \tag{1.24}$$

або

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r(p_1, \ldots, p_n; e_r, m_r, \mu, n) - \left(\frac{n_\gamma}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_3 + \frac{n_e}{2} \mu \frac{d}{d\mu} Z_2\right) \Gamma_r = 0. \tag{1.25}$$

Далі, розписуючи повну похідну,

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu} + \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial e_r} + \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_r} - \frac{n_\gamma}{2} \cdot \mu \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \mu} - \frac{n_e}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \mu}\right) \Gamma_r = 0. \tag{1.26}$$

Визначимо функції

$$\beta\left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n\right) \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu}, \tag{1.27}$$

$$\gamma_m\left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n\right) \equiv \mu \frac{\partial m_r}{m_r \cdot \partial \mu}, \qquad \gamma\left(e_r, \frac{m_r}{\mu}, n\right) \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \tag{1.28}$$

Ці функціїї мають границю при $n \to 4$, безрозмірні і залежать від e_r і відношення m_r/μ. В останньому рівнянні вже можна перейти до границі $n \to 4$. Маємо

$$\boxed{\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial e_r} + \gamma_m \cdot m_r\frac{\partial}{\partial m_r} - n_\gamma\gamma_\gamma - n_e\gamma_e\right)\Gamma_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,e_r,m_r,\mu) = 0.} \tag{1.29}$$

Це рівняння ренормалізаційної групи. Воно означає, що явна залежність перенормованих функцій $\Gamma_r^{(n)}(p_1,\ldots,p_n,e_r,m_r,\mu)$ від параметра μ повинна бути скомпенсована залежністю від нього величин e_r і m_r.

Обчислимо розмірність $\Gamma_r^{(n)}$. Для функції Гріна загального виду

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \langle 0|T\psi(x_1)\ldots\psi(x_{\frac{n_e}{2}})\bar{\psi}\ldots\bar{\psi}(x_{\frac{n_e}{2}})A(y_1)\ldots A(y_{n_\gamma})|0\rangle,$$

враховуючи розмірність полів $[\psi] = m^{3/2}$, $[A_\mu] = m$, знаходимо розмірність

$$[G(x_1,\ldots,x_n)] = m^{\frac{3}{2}n_e+n_\gamma}. \tag{1.30}$$

З Фур'є перетворення

$$G(p_1,\ldots,p_n) = \int d^4x_1\ldots d^4x_n e^{i\sum_{i=1}^n p_i x_i}G(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.31}$$

визначається розмірність

$$[G(p_1,\ldots,p_n) = m^{\frac{3}{2}n_e+n_\gamma-4(n_e+n_\gamma)}, \tag{1.32}$$

де ми використали, що $[x] = m^{-1}$. Далі, виділяючи дельта-функцію,

$$G(p_1,\ldots,p_n) = \delta(p_1+\ldots+p_n)\bar{G}(p_1,\ldots,p_n),$$

маємо для розмірності $\bar{G}$:

$$[\bar{G}(p_1,\ldots,p_n)] = m^{4-\frac{5}{2}n_e-3n_\gamma}. \tag{1.33}$$

Підрахуємо тепер розмірність ампутованих функцій Гріна

$$\Gamma = (G^{-1})^{n_e}(D^{-1})^{n_\gamma}\bar{G} \quad \Rightarrow \quad [\Gamma] = m^D, \tag{1.34}$$

де

$$D = n_e + 2n_\gamma + 4 - \frac{5}{2}n_e - 3n_\gamma = 4 - \frac{3}{2}n_e - n_\gamma \tag{1.35}$$

(співпадає з індексом розбіжності діаграм відповідної функції Гріна).

З міркувань розмірності запишемо Γ_r у вигляді

$$\Gamma_r = \mu^D f\left(\frac{p_1}{\mu}, \ldots, \frac{p_n}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right), \tag{1.36}$$

де f є безрозмірною функцією своїх аргументів. З точки зору фізики нас цікавить залежність від імпульсів, тому розглянемо випадок, коли всі імпульси в Γ_r змінюються одночасно в t разів:

$$\Gamma_r(tp_1, \ldots, tp_n, m_r, \mu, e_r) = \mu^D f\left(\frac{tp_i}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right). \tag{1.37}$$

Частинну похідну по μ перепишем як

$$\mu\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\mu} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\mu^D f\left(\frac{tp_i}{\mu}, \frac{m_r}{\mu}, e_r\right)\right] = D\Gamma_2 - t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_r - m_r\frac{\partial}{\partial m_r}\Gamma_r. \tag{1.38}$$

Це випливає з диференцювання

$$t\frac{\partial}{\partial t}f\left(\frac{tp_i}{\mu}\right) = \frac{tp_i}{\mu}f',$$

і для функції $f(x, y)$, де $x = \frac{tp}{\mu}$ і $y = \frac{m_r}{\mu}$ маємо

$$\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} = -\frac{tp}{\mu}f'_x - \frac{m_r}{\mu}f'_y = -t\frac{\partial f}{\partial t} - m_r\frac{\partial f}{\partial m_r}.$$

Таким чином, отримуємо для Γ_r рівняння, яке виражає зміну масштаба

$$\boxed{\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + t\frac{\partial}{\partial t} + m_r\frac{\partial}{\partial m_r} - D\right)\Gamma_r = 0.} \tag{1.39}$$

Виключаючи із двох рівнянь (1.29) і (1.39) величину $\mu\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\mu}$, знаходимо

$$\left[-t\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial e_r}+(\gamma_m-1)m_r\frac{\partial}{\partial m_r}+4-\left(\frac{3}{2}+\gamma_e\right)n_e-(1+\gamma_\gamma)n_\gamma\right]$$
$$\times\Gamma_r(tp_1,\ldots,tp_n;m_r,e_r,\mu)=0. \tag{1.40}$$

Це основне рівняння ренормалізаційної групи для одночастинковонезвідних функцій Гріна. Функція β називається функцією Гелл-Манна – Лоу, а функції $\gamma_e, \gamma_\gamma, \gamma_m$ - аномальними розмірностями. Це рівняння є однорідним лінійним рівнянням в частинних похідних першого порядку. Воно виражає результат зміни масштаба імпульсов, від яких залежить Γ_r, в t раз.

Знайдемо розв'язок рівняння (1.40) припускаючи, що функції $\beta, \gamma_e, \gamma_\gamma, \gamma_m$ нам відомі. Зміна t може бути скомпенсовано зміною e_r, m_r і загального множника. Нехай є функції $e(t)$, $m(t)$ і $f(t)$ такі, що розв'язок можна записати у вигляді

$$\Gamma^{(n)}(tp,m_r,e_r,\mu)=f(t)\Gamma^{(n)}(p,m(t),e(t),\mu). \tag{1.41}$$

Порахуємо похідну по t:

$$t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp,m,e,\mu)=t\frac{\partial f}{\partial t}\Gamma^{(n)}+f(t)\frac{\partial m(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}\Gamma(p,m(t),e(t),\mu)$$
$$+f(t)t\frac{\partial e(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial e(t)}\Gamma^{(n)}(p,m(t),e(t),\mu)$$
$$=\left(t\frac{df}{dt}+f\cdot t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}+f\cdot t\frac{\partial e}{\partial t}\frac{\partial}{\partial e(t)}\right)\Gamma^{(n)}(p,m(t),e(t),\mu)$$
$$=\left(t\frac{df}{dt}+f\cdot t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+f\cdot t\frac{\partial e}{\partial t}\frac{\partial}{\partial e}\right)\frac{1}{f(t)}\Gamma^{(n)}(tp,m_r,e_r,\mu). \tag{1.42}$$

Будемо вимагати шоб розв'язок у формі (1.41) тотожньо задовольняв рівняння (1.40). Підставляючи останній вираз в (1.40), і порівнюючи коефіцієнти, знаходимо

$$t\frac{\partial e(t)}{\partial t}=\beta(e), \qquad e(1)=e_r, \tag{1.43}$$

$$t\frac{\partial m(t)}{\partial t} = m(t)(\gamma_m - 1), \qquad m(1) = m_r, \tag{1.44}$$

$$\frac{1}{f}t\frac{\partial f}{\partial t} = 4 - \left(\frac{3}{2} + \gamma_e\right)n_e - (1+\gamma_\gamma)n_\gamma, \qquad f(1) = 1. \tag{1.45}$$

Функція $e(t)$ називається бігучою константою взіємодії, або ефективним зарядом, який залежить від масштаба енергіїі - імпульса на якому він вимірюється, $m(t)$ — бігуча маса. Ці функції можна знайти, зная $\beta(e_r)$ і $\gamma_m(e_r)$. Технічно трудно проінтегрувати рівняння для $e(t)$ і $m(t)$, так як β і γ_m залежать від двох змінних $e(t)$ та $\frac{m}{(}t)\mu$, і маємо зв'язану систему рівнянь. Існують, однак, рецепти перенормувань, коли β і γ_m стають не залежними від мас (т'Хоофт, Вайнберг). Тоді рівняння для $e(t)$ і $m(t)$ можна проінтегрувати.

Для $f(t)$ маємо рівняння

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \ln t} = 4 - \left(\frac{3}{2} - \gamma_e\right)n_e - (1+\gamma_\gamma)n_\gamma \tag{1.46}$$

розв'язок якого легко знаходиться

$$f(t) = t^{4-\frac{3}{2}n_e - n_\gamma}\exp\left[-n_e\int\limits_1^t \gamma_e(t)\frac{dt}{t} - n_\gamma\int\limits_1^t \gamma_\gamma(t)\frac{dt}{t}\right]. \tag{1.47}$$

Загальний розв'язок рівняння ренормгрупи має вигляд

$$\Gamma^{(n)}(tp, m_r, e_r, \mu) = t^{4-\frac{3}{2}n_e - n_\gamma}\exp\left[-n_e\int\limits_1^t \frac{\gamma_e(e(t))dt}{t} - n_\gamma\int\limits_1^t \frac{\gamma_\gamma(e(t))dt}{t}\right]$$
$$\times\ \Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu). \tag{1.48}$$

Експоненціальний доданок приводить до появи так званих "аномальних розмірністей", що легко бачити для частного розв'язку, коли $e = e_0 = const$ і $\beta(e) = 0$, коли множник перед $\Gamma^{(n)}(p, m(t), e(t), \mu)$ зводиться до

$$t^{4-(\frac{3}{2}+\gamma_e(e_0))n_e-(1+\gamma_\gamma(e_0))n_\gamma}. \tag{1.49}$$

Тобто, канонічні розмірності полей 3/2 і 1 замінюються в результаті взаємодії на динамічні розмірності $\frac{3}{2} + \gamma_e(e_0)$ і $1 + \gamma_\gamma(e_0)$, відповідно. Доданки $\gamma_e(e_0)$ і $\gamma_\gamma(e_0)$ до канонічних розмірностей звуться аномальними розмірностями відповідних полей.

2. Розв'язок рівняннь ренормалізаційної групи у другому порядку теорії збурень.

Розглянемо випадок коли бета-функція не залежить від маси

$$t\frac{\partial e(t)}{\partial t} = \beta(e(t)) \quad \Rightarrow \quad t\frac{\partial e^2(t)}{\partial t} = 2e(t)\beta(e(t)) = \tilde{\beta}(e^2(t)). \tag{2.1}$$

В загальному випадку маємо рівняння

$$t\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \beta(g(t)), \qquad g(1) = g_r. \tag{2.2}$$

В електродинамиці ми знайшли у другому порядку теорії збурень зв'язок між голим і фізичним зарядами (позначимо $e \equiv e_r$)

$$e_B = eZ_3^{-1/2}\mu^{\frac{4-n}{2}}, \qquad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \tag{2.3}$$

або з точністю до e^2,

$$e_B \simeq e\left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2(4-n)}\right)\mu^{\frac{4-n}{2}}, \tag{2.4}$$

Оскільки голий заряд e_B не залежить від μ, то диференціюючи останню рівність по μ, одержимо рівняння для бета-функції

$$0 = \beta\left(1 + \frac{e^2}{4\pi^2(4-n)}\right)\mu^{\frac{4-n}{2}} + \frac{4-n}{2}\mu^{\frac{4-n}{2}}\left(1 + \frac{e^2}{12\pi^2(4-n)}\right), \tag{2.5}$$

звідки з нашою точністю знаходимо

$$\beta(e) = \frac{n-4}{2}e\frac{1 + \frac{e^2}{12\pi^2(4-n)}}{1 + \frac{e^2}{4\pi^2(4-n)}} \simeq \frac{n-4}{2}e\left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}\right). \tag{2.6}$$

Як вже стверджувалося, бета-функція є скінченою в границі коли $n \to 4$,

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}, \qquad n = 4. \tag{2.7}$$

Рівняння для ефективної константи взаємодії

$$t\frac{\partial e(t)}{\partial t} = \frac{e^3(t)}{12\pi^2} \quad \Rightarrow \quad t\frac{\partial e^2(t)}{\partial t} = \frac{e^4(t)}{6\pi^2}, \quad e(1) = e_r. \tag{2.8}$$

Це рівняння легко розв'язується

$$e^2(t) = \frac{e_r^2}{1 - \frac{e_r^2}{6\pi^2}\ln t}, \tag{2.9}$$

або, вводячи постійну тонкої структури $\alpha = e_r^2/4\pi$, і відповідно бігучу $\alpha(t) = e^2(t)/4\pi$, перепишем у вигляді

$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi}\ln\frac{|p|}{m}} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{p^2}{m^2}}, \qquad t = \frac{|p|}{m}. \tag{2.10}$$

$\alpha(t)$ стає $\gg 1$ в області $1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{p^2}{m^2} \simeq 0$ і в точці $p^2 = m^2 e^{\frac{3\pi}{\alpha}}$ виникає полюс, який зветься полюсом Ландау. Але такі значення енергії неможливо досягти фізично. Більш того, зі зростанням енергії вступають в дію інші взаємодії, сильні і слабкі, а згодом і гравітаційні. Тобто, квантова електродинамика не є фізично замкненою теорією. Залежність ефективної константи від енергії підтверджена на експерименті. Наприклад, при енергії порядку 200 Гев ефективна константа α дорівнює 1/127 замість 1/137 при низьких енергіях.

В скалярній електродинаміці з взаємодією $\lambda\Phi^4/4!$ бета-функція має вигляд

$$\beta(\lambda) = 3\lambda^2/16\pi^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{2.11}$$

Для неабельових теорій Янга-Мілса з n_f числом ферміонів і кольорової групою $SU(3)$

$$\beta(g) = \frac{g^3}{16\pi^2}\left(-11 + \frac{2n_f}{3}\right) < 0, \quad \text{якщо} \quad n_f \leq 16. \tag{2.12}$$

Розв'язок рівняння для ефективної константи зв'язку дає

$$g^2(t) = \frac{g_r^2}{1 - \frac{g_r^2}{8\pi^2}(-11 + 2n_f/3)\ln t}. \tag{2.13}$$

Ця ефективна взаємодія прямує до нуля, $g^2(t) \to 0$, при великих переданих імпульсах ($t|p|/m \to \infty$), або малих відстанях. Це явище отримало назву асимптотичної свободи, яке відіграє важливу роль в квантовій хромодинаміці - кварки поводять себе як майже вільні частинки на малих відстанях.

2.1. Квантова хромодинаміка

У квантовій хромодинамиці співвідношення між ренормованою і голою константами зв'язку у другому порядку теорії збурень має вигляд

$$g_r = g\left[1 - \frac{g^2}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{1}{3}T_r N_f\right)\left(\frac{1}{n-4} + \ln\mu\right)\right], \tag{2.14}$$

де $C_2(G) = N_c$— оператор Казиміра для кольорової групи $G = SU(N_c)$, $T_r = 1/2$ для фундаментального представлення. Диференцюючи це співвілношення по μ, знаходимо бета-функцію:

$$\beta(g_r) = \mu\frac{dg_r(\mu)}{d\mu} = -\frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11C_2}{12} - \frac{N_f}{6}\right) \simeq -\frac{g_r^3}{4\pi^2}\frac{11C_2(G) - 2N_f}{12}. \tag{2.15}$$

Для кольорової групи $SU(3)$ $N_c = 3$ і коефіцієнт $11C_2(G) - 2N_f > 0$ якщо число ферміонів (ароматів) $N_f < 16$; бета-функція в цьому випадку від'ємна, що веде до асимптотичної свободи.

В термінах константи $\alpha_s = \frac{g_r^2}{4\pi}$ - аналога постійної тонкої структури в КЕД,

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{b\alpha_s^2}{\pi}, \qquad \mu\frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{b\alpha_s^2}{\pi}, \quad b = \frac{11N_c - 2N_f}{6}. \tag{2.16}$$

Розв'язок рівняння ренормгрупи

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{2\pi} b \ln \frac{\mu^2}{M^2}}, \tag{2.17}$$

де використана гранична умова $\alpha = \alpha_s(\mu^2 = M^2)$. Відповідь звичайно записують у вигляді

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{2\pi}{b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \qquad \Lambda^2 = M^2 e^{-\frac{2\pi}{b\alpha(M)}}, \tag{2.18}$$

де вводиться розмірний параметр КХД Λ, незалежний від вибору точки нормування M (легко переконатись, що $M d\Lambda/dM = 0$).

Введемо позначення

$$a(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} = \frac{g_r^2(\mu^2)}{4\pi^2}. \tag{2.19}$$

Тоді для внесків в бета-функцію від петльових діаграм можна записати

$$\mu\frac{da}{d\mu} = \beta(a) = -ba^2[\underbrace{1}_{\text{1-loop}} + \underbrace{ca}_{\text{2-loop}} + c_2 a^2 + c_3 a^3 + \ldots] \tag{2.20}$$

Коефіцієнти b, c не залежать від схеми віднімань, всі вищі залежать. Всі коефіцієнти b, c, c_2, c_3 були обчислені в $\overline{\text{MS}}$ схемі, для двопетльового внеску

$$c = \frac{153 - 19N_f}{12b}.$$

Розв'язок ренормгрупового рівняння в 2-х петльовому наближенні може бути записано через трансцендентну функцію Ламберта, визначаємою неявно рівнянням

$$W(z)e^{W(z)} = z. \tag{2.21}$$

Маємо

$$\alpha(\mu^2) = -\frac{1}{c[1+W(z(\mu))]}, \quad z(\mu) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{-b/c}. \tag{2.22}$$

В вищих порядках бігуча константа стає залежною від схеми віднімань. Спеціальний вибір такої схеми був запропонованої Хоофтом, де всі $c_2 = c_3 = \ldots = 0$.

3. Рівняння для ефективної константи взаємодії. Загальний аналіз.

Розглянемо загальний випадок рівняння для ефективної константи взаємодії

$$\mu\frac{dg(\mu)}{d\mu} = \beta(g(\mu)) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dg}{\beta(g)}, \qquad g(\mu=\mu_0) = g_r, \tag{3.1}$$

яке можна переписати як

$$\ln\frac{\mu}{\mu_0} = \int\limits_{g_r}^{g(\mu)} \frac{dx}{\beta(x)}. \tag{3.2}$$

Знання β-функції дозволяє знайти $g(\mu)$ з останнього виразу. У загальному випадку, поза межами теорії збурень, можливі наступні випадки.

а) Нехай бета-функція додатня, $\beta(g) > 0$, і залишається додатковою при всіх g, і при цьому інтеграл в (3.2) збігається,

$$\int^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)} < \infty. \tag{3.3}$$

Тоді ефективна константа взаємодії $g(\mu)$ монотонно зростає і стає нескінченою при *скінченному* значенні E:

$$E_\infty = \mu_0 \exp\left(\int\limits_{g(\mu_0)}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)}\right).$$

Така ситуація має місце в квантовій електродинаміці якщо обмежитися другим порядком теорії збурень, де

$$\beta(g) = \frac{g^2}{6\pi^2}, \qquad g = e^2.$$

Відповідна гранична енергія

$$E_\infty = \mu_0 \exp\left(\frac{6\pi^2}{g_{\mu_0}}\right).$$

Звичайно, наближення $\beta(g) = g^2/6\pi^2$ стає неприйнятним раніше, ніж буде досягнута енергія E_∞, так як заряд стає великим, і теорія збурень перестає бути застосовною.

Переріз або будь-яка фізична величина може бути записана у вигляді

$$R = \mu^D f\left(\frac{E}{\mu}, X, g(\mu)\right),$$

де D— масова розмірність величини R, X — відношення енергетичних змінних. Величина R не залежать від μ, тобто, $\mu dR/d\mu = 0$, що означає компенсацію явної залежності від μ через залежність перенормованної константи зв'язку. Покладемо довільний параметр $\mu = E$,

$$R(E) = E^D f(1, X, g(E)).$$

Залежність від E визначається ефективною константою взаємодії $g(E)$ (крім тривіальної залежності E^D), яка знаходиться з рівняння (3.1).

б) Монотонне зростання.

Нехай бета-функція $\beta(g)$ додатня і зростає з ростом g, але достатньо повільно, так що інтеграл в (3.2) розбігається,

$$\int^\infty \frac{dg}{\beta(g)} = \infty. \tag{3.4}$$

Наприклад, нехай асимптотично бета-функція поводить себе як $\beta(g) \sim bg^k$, $g \to \infty$, $b > 0$, $k < 1$. Розв'язок рівнянь ренормгрупи буде

$$g_E = \left[1 + (1-k)bg_\mu^{k-1} \ln \frac{E}{\mu}\right]^{1/(1-k)} g_\mu.$$

Якщо g_μ мало при деякому μ, то рост g_E буде помітний тільки при дуже великих E.

$$g_E \to [(1-k)b \ln E]^{1/(1-k)}, \qquad E \to \infty.$$

Асимптотичне поведінка є не залежною від g_μ.

в) Фіксована точка при скінченному значенні константи.

Точки g_0, де β-функція обертається в нуль, називаються фіксованими точками. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли нуль β-функції є першого порядку. Поблизу нього

$$\beta(g) = (g - g_0)\beta'(g_0), \tag{3.5}$$

і рівняння (3.2) приймає вигляд

$$t\frac{dg}{dt} = (g - g_0)\beta'(g_0), \quad t = \mu/\mu_0, \quad g(\mu = \mu_0) = g_r. \tag{3.6}$$

Це рівняння легко розв'язується

$$\frac{dg}{g - g_0} = \beta'(g_0)\frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{g_r}^{g(t)} \frac{dx}{x - g_0} = \beta'(g_0) \ln t,$$

звідки знаходимо

$$\ln \left| \frac{g(t) - g_0}{g_r - g_0} \right| = \beta' \ln t. \tag{3.7}$$

Якщо $g_r > g_0$, то

$$g(t) = g_0 + (g_r - g_0)t^{\beta'(g_0)}. \tag{3.8}$$

Очевидно, що границю $t \to \infty$ можна дослідити у випадку $\beta' < 0$. Тоді ефективна константа взаємодії прямує до фіксованної точки

$$g(t) \to g_0, \qquad t \to +\infty. \tag{3.9}$$

В цьому випадку g_0 зветься ультрафіолетово-стабільною точкою.Такий же результат одержуємо і для $g_r < g_0$. В околі фіксованої точки аномальна розмірність поля

$$\gamma(g) \sim \gamma(g_0) + c(g - g_0) + \mathcal{O}((g - g_0)^2). \tag{3.10}$$

Функція Гріна буде містити множник

$$\Gamma^{(n)} \sim E^{4-\frac{3}{2}n_e - n_\gamma} \exp\left[-\int^E \gamma_e(g_\mu)\frac{d\mu}{\mu}n_e - \int^E \gamma_\gamma(g_\mu)\frac{d\mu}{\mu}n_\gamma\right] \simeq$$
$$\simeq E^{4-\left(\frac{3}{2}+\gamma_e(g_0)\right)n_e - (1+\gamma_\gamma(g_0))n_\gamma}.$$

Тому γ_γ, γ_e називаються аномальними розмірностями фотонного і електрон-позітронного полів, відносно.

г) Асимптотична свобода.

Нехай бета-функція поводить себе при малих значеннях константи взаємодії

$$\beta(g) \simeq -bg^4, \qquad b > 0, \quad n > 1, \quad g \to 0. \tag{3.11}$$

Розв'язок ренормгрупового рівняння буде

$$g_E = g_\mu \left[1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln\frac{E}{\mu}\right]^{-1/(n-1)}. \tag{3.12}$$

При великих значеннях енергії кфективна константа прямує до нуля,

$$g_E \to [b(n-1)\ln E]^{-1/(n-1)} \to 0, \qquad E \to \infty, \tag{3.13}$$

тобто, має місце асимптотична свобода. Поведінка аномальних розмірностей в границі малих g знаходиться з теорії збурень,

$$\gamma(g) \sim c g^m.$$

Тоді для функцій Гріна Γ

$$\Gamma \sim \exp\left(-\int^E \gamma(g_\mu)\frac{d\mu}{\mu}\right) \to \exp\left[-c\int^E [b(n-1)\ln\mu]^{-\frac{m}{n-1}}\frac{d\mu}{\mu}\right]$$
$$\sim \exp\left[-\frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{1-\frac{m}{n-1}}(\ln E)^{1-\frac{m}{n-1}}\right]. \tag{3.14}$$

Тому, у випадку асимптотичної свободи не виникає поправок до ефективної розмірності.