1. Класичні поля Янга – Мілса

Включення електромагнітного поля відбувається за допомогою подовження похідної $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ в лагранжіане для матеріальних полів.

Для комплексного скалярного поля це дає лагранжеву густину

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\varphi^* \varphi), \tag{1.1}$$

яка інваріантна відносно локальних калібрувальних перетворень

$$\varphi(x) \to e^{i\alpha(x)} \varphi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x),$$

або, еквівалентно,

$$\varphi(x) \to \varphi' = e^{ie\Lambda(x)} \varphi(x), \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x). \tag{1.2}$$

Ці перетворення відносяться до абельової групи $U(1)$ локальних перетворень. Коваріантна похідна при цьому перетворюється таким же чином як і само поле, тобто, домножається на фазовий множник

$$D'_\mu \varphi'_\mu(x) = e^{ie\Lambda(x)} D_\mu \varphi(x). \tag{1.3}$$

Розглянемо узагальнення на групи більш складних неабельових груп, де поля належать до деякого представлення групи

$$\varphi_a \to \varphi'_a = U_{ab} \varphi_b, \quad U = \exp(i\omega^a T_a). \tag{1.4}$$

Матриці T_a є генераторами групи, індекс a пробігає значення $a = 1, \ldots, d(G)$, де $d(G)$ розмірність групи. Для унітарних груп

$$UU^+ = U^+ U = 1, \tag{1.5}$$

а генератори є ермітовими матрицями $T_a^+ = T_a$ для яких виконуються комутаційні співвідношення

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \text{ — алгебра Лі.} \tag{1.6}$$

Коефіцієнти $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ називаються структурними константами групи які є дійсними для унітарної групи. Наприклад, для групи $SU(2)$ генератори пов'язані з матрицями Паулі, $T_a = \frac{\tau_a}{2}$, які задовольняють комутаційним співвідношенням,

$$[T_a, T_b] = i\varepsilon_{abc} T_c, \tag{1.7}$$

де структурними константами є повністю антисиметричний тензор ε_{abc}.

Мы хочемо мати лагранжіан, інваріантний відносно локальних калібрувальних перетворень

$$U(x) = \exp\left(i\omega^a(x) T_a\right). \tag{1.8}$$

Очевидно, члени з похідною в лагранжіані не є інваріантними відносно таких локальних перетворень

$$\partial_\mu \varphi \to \partial_\mu (U\varphi) = U\partial_\mu \varphi + \partial_\mu U \varphi \neq U \partial_\mu \varphi. \tag{1.9}$$

По аналогії з електромагнітним полем введемо подовжену похідну

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x), \quad A_\mu^\dagger = A_\mu.$$

де $A_\mu(x)$ тепер матриця. Умова $A_\mu^\dagger = A_\mu$ вимагається для того, щоб похідна була антиермітовим оператором як і звичайна похідна. Вимагаємо далі, щоб похідна $D_\mu \varphi$ перетворювалась коваріантним чином при перетвореннях (1.8)

$$D'_\mu \varphi' = U D_\mu \varphi = U D_\mu U^{-1} \varphi', \tag{1.10}$$

звідки, внаслідок довільності φ', похідна повинна перетворюватись

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1}. \tag{1.11}$$

Розписуючи цей закон перетворення,

$$\partial_\mu + igA'_\mu = U(\partial_\mu + igA_\mu)U^{-1} = \partial_\mu + igUA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}, \tag{1.12}$$

знаходимо як повинно перетворюватись калібрувальне поле

$$\boxed{A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}U\partial_\mu U^{-1}.} \tag{1.13}$$

В якості A_μ достатньо розглядати A_μ, що належить алгебрі Лі, при цьому $UA_\mu U^{-1}$ також належить алгебре оскільки UT_aU^{-1} задовольняють коммтаціоним співвідношенням. Розкладемо матрицю A_μ по базісним матрицям відповідної алгебри Лі

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T_a, \tag{1.14}$$

де коефіцієнти розкладу A^a_μ є дійсними полями внаслідок ермітовості A_μ і T^a.

Розглянемо інфінітезімальні перетворення

$$\begin{aligned} A'^a_\mu T_a &= (1 + i\omega^a T_a)A^b_\mu T_b(1 - i\omega^c T_c) + \frac{1}{ig}(1 + i\omega^a T_a)\partial_\mu(1 - i\omega^b T_b) \\ &\simeq A^b_\mu T_b + i\omega^a A^b_\mu[T_a, T_b] - \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a T_a, \end{aligned} \tag{1.15}$$

звідки

$$A'^a_\mu T_a = A^a_\mu T_a + i\omega^a A^b_\mu \cdot if^c_{ab}T_c - \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a T_a, \tag{1.16}$$

або для коефіцієнтів

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - f^a_{bc}\omega^b A^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a. \tag{1.17}$$

Інфінітезімальне перетворення можна записати як коваріантну похідну від локальних параметрів перетворення

$$\boxed{\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}\left\{\partial_\mu \omega^a - g f^a_{bc} A^b_\mu \omega^c\right\} = -\frac{1}{g}\left(D_\mu \omega\right)^a.} \tag{1.18}$$

Перетворення полів Янга – Мілса універсально і не залежить від представлення, по якому перетворуються поля матерії, оскільки воно залежить тільки від фундаментальних констант групи.

Нам треба знайти тепер лагранжіан для поля Янга-Мілса, який був би інваріантний відносно перетворень (1.13). Порахуемо комутатор коваріантних похідних

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\varphi &= [\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu]\varphi \\
&= \left((\partial_\mu + igA_\mu)(\partial_\nu + igA_\nu) - (\partial_\nu + igA_\nu)(\partial_\mu + igA_\mu)\right)\varphi \\
&= (\partial_\mu\partial_\nu + ig\partial_\mu A_\nu + igA_\nu\partial_\mu + igA_\mu\partial_\nu - g^2 A_\mu A_\nu \\
&- \partial_\mu\partial_\nu - ig\partial_\nu A_\mu - igA_\mu\partial_\nu - igA_\nu\partial_\mu + g^2 A_\nu A_\mu)\varphi \\
&= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu])\varphi \equiv igF_{\mu\nu}\varphi,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

і внаслідок довільності φ маємо операторну рівність

$$\boxed{[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu].} \tag{1.20}$$

Антісиметричний тензор $F_{\mu\nu}$ нагадує тензор електромагнітного поля. Зауважимо однак, що на відміну від електромагнітного поля тензор полів Янга-Мілса містить нелінійні по A_μ доданки у вигляді комутатора. Неважко встановити закон перетворення цього тензора відносно локальних калібрувальних перетворень

$$F'_{\mu\nu} = [D'_\mu, D'_\nu] == [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UF_{\mu\nu}U^{-1}, \tag{1.21}$$

який на відміну від поля $A_\mu(x)$ перетворюється коваріантним чином. Розкладаючи тензор $F_{\mu\nu}$ по базісу алгебри Лі,

$$F^a_{\mu\nu}T_a = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + igA^b_\mu A^c_\nu[T_b, T_c] = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a - gf^a_{bc}T_a A^b_\mu A^c_\nu, \tag{1.22}$$

знаходимо коефіцієнти розкладу

$$\boxed{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu.} \tag{1.23}$$

Очевидно $\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ' є інваріантним відносно калібрувальних перетворень і може бути використаний для побудови кінетичного доданку калібрувального поля в лагранжіані

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\,\mathrm{tr}\, T_a T_b = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \tag{1.24}$$

де ми використали нормування генераторів

$$\mathrm{tr}\, T_a T_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

Ми тепер можемо записати лагранжеву густину для квантової хромодинаміки, яка описує взаємодію кварків і глюонів, і яка інваріантна відносно локальної калібрувальної групи $SU(3)$,

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}^i_k[i\gamma^\mu(D_\mu)^{ij} - m_k\delta_{kl}\delta^{ij}]\psi^j_l.} \tag{1.25}$$

Кваркові поля ψ^i_k належить до фундаментального представлення групи $SU(3)$, тобто мають "кольоровий" індекс $i, j = 1, 2, 3$ (red, yellow, blue). Індекси $k, l = 1, \ldots, N_f$ описують аромати кварков. Наразі відомо, що є шість ароматів, $N_f = 6$ (up, down, strange, charm, top/true, bottom/beauty), які по відношенню до групи $SU(2)$ слабких взаємодій записуть в дублетах

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Q = 2/3 \\ Q = -1/3 \end{matrix} \tag{1.26}$$

де верхні кварки u, c, t мають електричний заряд $+2/3$, а нижні d, s, b - заряд $-1/3$. Адрони і мезони є зв'язаними станами кварків, наприклад, склад протонів і нейтронів записується як $p = (uud)$, $n = (udd)$. Параметри мас, що входять до лагранжыану, визначаються з експерименту і мають наступні значення

$$\begin{aligned} &m_u = 2.16 \pm 0.25\,\mathrm{MeV},\ m_c = 1.27 \pm 0.02\,\mathrm{GeV},\ m_t = 172.76 \pm 0.30\,\mathrm{GeV},\\ &m_d = 4.65 \pm 0.47\,\mathrm{MeV},\ m_s = 99.6 \pm 4.3\,\mathrm{MeV},\ \ m_b = 4.18 \pm 0.03\,\mathrm{GeV}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

До сих пір ми розглядали коваріантну похідну, яка діє на набір полей φ_i як матриця на вектор: $(\delta_{ij}\partial_\mu + iA^a_\mu T^a_{ij})\varphi_j$. Постає питання: як діє коваріантна похідна на матрицу $\omega(x)$, яка належить алгебре Лі? Розглянемо дію похідної на вектор $(\omega \cdot \varphi)^a$,

$$D_\mu(\omega \cdot \varphi)^a = \partial_\mu(\omega \cdot \varphi)^a + ig(A_\mu \cdot \omega\varphi)^a. \tag{1.28}$$

З іншої сторони, будемо вимагати, щоб коваріантна похідна D_μ задовольняло правилу Лейбніца, тобто, діяла на добуток

$$\begin{aligned} D_\mu(\omega \cdot \varphi)^a &= (D_\mu\omega)^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}(D_\mu\varphi)^b \\ &\Rightarrow (D_\mu\omega)^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}(\partial_\mu\varphi^b + ig(A_\mu)^{bc}\varphi^c) \\ &= \partial_\mu\omega^{ab} \cdot \varphi^b + \omega^{ab}\partial_\mu\varphi^b + ig(A_\mu \cdot \omega)^{ab} \cdot \varphi^b. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Звідси, внаслідок довільності φ^b, знаходимо

$$(D_\mu\omega)^{ab} = \partial_\mu\omega^{ab} + ig\left[(A_\mu \cdot \omega)^{ab} - (\omega \cdot A_\mu)^{ab}\right], \tag{1.30}$$

або у матричному вигляді

$$D_\mu\omega = \partial_\mu\omega + ig\,[A_\mu, \omega]\,, \quad \text{тобто} \quad D_\mu = \partial_\mu + ig\,[A_\mu, \cdot]\,. \tag{1.31}$$

Напишемо тотожність Якобі

$$[D_\mu[D_\nu D_\lambda]] + [D_\nu[D_\lambda D_\mu]] + [D_\lambda[D_\mu D_\nu]] = 0. \tag{1.32}$$

Обчислюючи комутатори отримуємо тотожність Бьянкі

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \tag{1.33}$$

яку можна записати в скороченному вигляді, вводячи дуальний тензор $F^*_{\mu\nu}$:

$$D^\mu F^*_{\mu\nu} = 0, \quad F^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{1.34}$$

Оскільки $F_{\mu\nu}$ належить до алгебри Лі, то коваріантна похідна діє на цей тензор відповідно до визначення (1.31):

$$D_\mu F_{\nu\lambda} \equiv \partial_\mu F_{\nu\lambda} + ig[A_\mu, F_{\nu\lambda}]. \tag{1.35}$$

1.1. Рівняння руху для поля Янга – Мілса.

Рівняння руху для поля Янга – Мілса отримуються із дії

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{1.36}$$

прирівнюючи до нуля варіацію дії

$$\delta S = -\int d^4x\,\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}\right) = 0, \tag{1.37}$$

де варіація тензора

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu + ig(\delta A^\mu A^\nu + A^\mu \delta A^\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{1.38}$$

Тому, використовуємо ціклічность tr і антисиметрію $F_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
\delta S &= -2\int d^4x\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}(\partial^\mu\delta A^\nu + ig\delta A^\mu A^\nu + igA^\mu\delta A^\nu) \\
&= -2\int d^4x\,\mathrm{tr}\{-\partial^\mu F_{\mu\nu}\delta A^\nu + igF_{\mu\nu}A^\mu\delta A^\nu + igA^\nu F_{\mu\nu}\delta A^\mu\} \\
&= -2\int d^4x\,\mathrm{tr}\{(-\partial^\mu F_{\mu\nu} + ig[F_{\mu\nu}, A^\mu])\,\delta A^\nu\} = 0.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Звідси, внаслідок довільності локальних варіацій поля δA^ν, знаходимо рівняння Ейлера-Лагранжа для полів Янга-Мілса:

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} + ig[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0,} \tag{1.40}$$

або, в термінах коваріантної похідної,

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.41}$$

Кром того, маємо маємо тотожність Бьянкі

$$D^\mu F^*_{\mu\nu} = 0, \quad F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho}, \quad \varepsilon_{0123} = +1. \tag{1.42}$$

В принципі можна було б додати до лагранжіану інший квадратичний за тензором $F_{\mu\nu}$ доданок

$$I = \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}). \tag{1.43}$$

Розглянемо його більш детально. Використовуючи антисиметрію тензорів $F_{\mu\nu}$ і $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ запишемо

$$\begin{aligned} I &= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[(\partial_\mu A_\nu + igA_\mu A_\nu)(\partial_\lambda A_\rho + igA_\lambda A_\rho)] \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[(\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho + 2igA_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho + (ig)^2 A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho]. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Тепер, використовуючи циклічність tr,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho] = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[A_\nu A_\lambda A_\rho A_\mu] = \varepsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\,\mathrm{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho] \\ = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho] \Rightarrow 0, \end{aligned} \tag{1.45}$$

де у другій рівності ми зробили перепозначення $\mu \to \rho \to \lambda \to \nu \to \mu$.

Другий доданок в (1.44) можна записати, знов таки використовуючи властивості tr, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ і роблячи перепозначення,

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[A_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho] = \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda\,\mathrm{tr}[A_\mu A_\nu A_\rho]. \tag{1.46}$$

Остаточно бачимо, що інваріант I записується як повна похідна деякого виразу

$$I = 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda \operatorname{tr}(A_\rho\partial_\mu A_\nu + \frac{2ig}{3}A_\mu A_\nu A_\rho) = 4\partial_\lambda K^\lambda, \tag{1.47}$$

де

$$\boxed{K^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \operatorname{tr}(A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2ig}{3}A_\mu A_\nu A_\rho).} \tag{1.48}$$

називається топологічним струмом. Остання назва пов'язана с тим, що при виведенні ми не використовували рівняння руху. Доданок пропорційний I в лагранжіане не дає внесок при отриманні рівняннь руху, тому що є повною похідною. Однак він може давати нетривіальний внесок в дію на розв'язках рівняння руху (або інших конфігурацій полів Янга – Мілса), не спадаючих достатньо швидко на нескінченості (наприклад, для інстантонних розв'язків в евклідовому просторі).

В лагранжіані інваріант I додається у вигляд

$$\boxed{\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta g_s^2}{64\pi^2}F^{*a}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu},} \tag{1.49}$$

де θ деякий параметр, який треба визначити з експерименту. Важливо відмітити наступні наслідки існування доданку I. Якщо $\theta \neq 0$, тоді непертурбативні ефекти приводять до порушення CP симетрії і появі електричного дипольного момента у нейтрона. Порушення CP симетрії виникає тому, що лагранжіан полів Янга-Мілса з врахуванням доданку (1.49) залишається інваріантним відно комбінованої CPT симетрії, яка включає зарядове спряження, C, парність (зміна знаків просторових змінних на протилежні), P, і обернення часу T. Оскільки доданок (1.49) містить першу похідну за часом, то він порушує T симетрію, що означає, внаслідок збереження CPT симетрії, порушення комбінованої CP симетрії. Відсутність на експерименті такого електричного дипольного момента у нейтрона приводить до обмеження для θ:

$$|\theta| < 3 \cdot 10^{-10}. \tag{1.50}$$

Останні експерименти у 2006 році давали обмеження на електричний дипольний момент нейтрона $< 3 \cdot 10^{-26} e \cdot cm$. Експеримент, який планується провести в Щвейцарії, має намір досягти межі $< 5 \cdot 10^{-28} e \cdot cm$.

1.2. Приклади розв'язків класичних рівнянь Янга-Мілса.

Знайдений досить великий клас окремих розв'язків класичних рівнянь Янга-Мілса. У просторі-часу Мінковського Є статичний розв'язок рівнянь Янга-Мілса з групою $SU(2)$, який задається конфігурацією

$$A_0^0 = 0, \quad A_i^a(\vec{x}) = \varepsilon_{aij} \frac{x_j}{\vec{x}^2}. \tag{1.51}$$

Це так званий магнітний монополь Ву-Янга, для якого електричне поле (точніше аналог електричного поля) відсутне, $E_i^a = 0$, але присутне нетривіальне магнітне поле, $H_i^a \neq 0$. Рівняння Максвела не мають таких розв'язків.

Відомі також розв'язки типу плоских хвиль, які знайшов Коулмен, для них

$$A_1^a = A_2^a = 0, \quad A_0^a = A_3^a = x_1 f^a(x_0 + x_3) + x_2 \varphi^a(x_0 + x_3), \tag{1.52}$$

де $f^a(x_0 + x_3)$, $\varphi^a(x_0 + x_3)$— деякі довільні функції своїх аргументів.

Важливу роль для опису структури вакууму в квантовій хромодинамиці грають так звані інстантонні розв'язки рівнянь Янга-Мілса в евклідовому просторі, знайдені Поляковим, Новиковим, Тюпкиним і Шварцем. Вони є розв'язком так званих рівнянь дуальності

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \pm F^*_{\mu\nu},} \tag{1.53}$$

які є першого порядку по похідним. Розв'язки цього рівняння одночасно є розв'язками і рівнянь Янга-Мілса $D^\mu F_{\mu\nu} = 0$ внаслідок тотожності Бьянки $D^\mu F^*_{\mu\nu} = 0$.

В евклідовій області дія для полів Янга-Мілса приймає, після заміни $A_\mu \to \frac{1}{g} A_\mu$, вигляд

$$S_E = \frac{1}{2g^2} \int_E d^4x \, \mathrm{tr} \, F^2_{\mu\nu}. \tag{1.54}$$

Розгянемо додатню величину

$$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} + F^*_{\mu\nu})^2 \geq 0, \tag{1.55}$$

яку перепишимо як

$$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^*_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) \geq 2|\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})|. \tag{1.56}$$

З властивості тензора Леві-Чевіта,

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} = 2\left(\delta_{\rho\kappa}\delta_{\sigma\lambda} - \delta_{\rho\lambda}\delta_{\sigma\kappa}\right), \quad \varepsilon_{1234} = 1, \tag{1.57}$$

випливає, що $F^*_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.Отже маємо нерівність

$$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \geq |\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})| \tag{1.58}$$

[рівність справжнюється для (само)антидуальних полів $F_{\mu\nu} = \pm F^*_{\mu\nu}$]. Ми вже встановили, що має місце

$$\int d^4x \, \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) = 4 \int d^4x \partial_\mu K_\mu, \tag{1.59}$$

де вираз для струму K_μ наведено в (1.48). Таким чином, для дії маємо нерівність

$$S_E = \frac{1}{2g^2}\int_E d^4x \,\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2 \geq \frac{2}{g^2}\int_E d^4x \partial_\mu K_\mu = \frac{2}{g^2}\oint_S d\sigma_\mu K_\mu, \tag{1.60}$$

де в останній рівності ми здійснили перехід від інтегрування по об'єму до інтегрування на нескінченно віддаленої поверхні S. З вимоги скінченності дії знаходимо, що повинно виконуватись

$$F_{\mu\nu}(x) \Rightarrow 0, \quad |x| \to \infty. \tag{1.61}$$

Це означає, що для полів маємо граничну умову

$$A_\mu(x) \Rightarrow -iU\partial_\mu U^{-1}, \quad |x| \to \infty. \tag{1.62}$$

Конфігурації полів $A_\mu(x) = -iU\partial_\mu U^{-1}$ звуться вакуумними, оскільки для них поле $F_{\mu\nu}(x) = 0$, і вони отримуються з тривіального поля $A_\mu = 0$ за допомогою калібрувального перетворення (1.13). Топологічний струм K_μ на нескінченно віддаленої поверхні S поводить себе як

$$\begin{aligned} K_\mu &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}(A_\nu\partial_\lambda A_\rho + \frac{2ig}{3}A_\nu A_\lambda A_\rho) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[-U\partial_\nu U^{-1}\partial_\lambda U\partial_\rho U^{-1} - \frac{2}{3}U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\lambda U^{-1}U\partial_\rho U^{-1}] \\ &= \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\lambda U^{-1}U\partial_\rho U^{-1}], \quad |x| \to \infty, \end{aligned} \tag{1.63}$$

де ми використали продифіренціойване співвідношення $UU^{-1} = 1$:

$$\partial_\nu UU^{-1} + U\partial_\nu U^{-1} = 0.$$

Таким чином для дії отримуємо нижню межу

$$S_E \geq \frac{1}{3g^2}\oint_S d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\lambda U^{-1}U\partial_\rho U^{-1}], \tag{1.64}$$

яка не залежить від поля $A_\mu(x)$, а тільки від групового елементу $U(x)$.

У випадку симетрії $SU(2)$ груповий елемент $U(x)$ залежить від трьох групових параметрів $\varphi^a(x)$, $a = 1,2,3$, які змінюються в межах $0 \leq \varphi^a(x) \leq \pi$, тобто, значення $\varphi^a(x)$ пробігають тривимірну кулю радіусом π (сфера S^3). Інтегрування в x-просторі на нескінченності також йде по сфері S^3. Таким чином, $U(x)\big|_{|x|=\infty}$ відображає сферу в сферу, $S^3 \to S^3$. Такі неперервні диференційовні відображення характеризуються гомотопичним класом - n-кратним покриттям одної сфери іншою (класи Понтрягіна). Для дії маємо нерівність

$$S_E \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|n|, \tag{1.65}$$

де ціле число (топологічний інваріант Понтрягіна)

$$\boxed{n = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})) = \frac{1}{24\pi^2}\oint d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}[U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\lambda U^{-1}U\partial_\rho U^{-1}].} \tag{1.66}$$

Прикладом розв'язків самодуального рівняння $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$ з топологічним числом $n = 1$ є наступна конфігурація

$$\boxed{A_\mu(x) = \frac{-ix^2}{x^2+a^2}U\partial_\nu U^\dagger, \quad U(x) = \frac{x_4 - i\vec{\sigma}\vec{x}}{\sqrt{x^2}},\, x = (\vec{x}, x_4).} \tag{1.67}$$

Тут $\vec{\sigma}$— матриці Паулі, a— довільний параметр розмірності довжини. На нескінченності ця конфігурація поля очевидно прямує до вакуумної, де $F_{\mu\nu} = 0$. Розв'язок описує локалізовану в просторі і часі конфігурацію поля з параметром локалізації a, яка називається інстантоном. В загальному випадку, інстантонні розв'язки з довільним топологічним числом n дають внесок в функціональний інтеграл $\sim \exp(-8\pi^2/g^2|n|)$, який експоненційно малий для $g << 1$. Всі класичні вакууми з $F_{\mu\nu} = 0$ описуються полями

$A_\mu(x) = -iU\partial_\mu U^\dagger$ і розрізняються топологічним числом n. В просторі-часі Мінковського інстантони з топологічним числом n описують квантове тунелювання між класичними вакуумами $|N\rangle$ і $|N+n\rangle$.

2. Основні відомості із теорії алгебр Лі

В квантовій механиці і КТП важливі групи унітарних операторів, які діють у векторному просторі квантових станів. Групові перетворення звичайно записують у вигляді матричної експоненти (1.4), або, для інфінітезимального елементу

$$U(\omega) \simeq 1 + i\omega^a T_a. \tag{2.1}$$

Генератори групи задовольняють тотожність Якобі

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0,$$

звідки використовуючи комутаційні співвідношення (1.6), отримуємо тотожність для структурних констант, яким вони повинні задовольнять:

$$\begin{aligned} & f^d_{bc}[T_a, T_d] + f^d_{ca}[T_b, T_d] + f^d_{ab}[T_c, T_d] = 0 \\ \Rightarrow \quad & f^d_{bc} f^e_{ad} + f^d_{ca} f^e_{bd} + f^d_{ab} f^e_{cd} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$f^e_{ad} f^d_{bc} - f^e_{bd} f^d_{ac} = f^d_{ab} f^e_{dc}. \tag{2.3}$$

Визначимо матриці

$$(t_a)^b_c \equiv i f^b_{ac}. \tag{2.4}$$

Ці матриці утворюють так зване приєднане представлення алгебри Лі, які справжнюють тіж самі комутаційні співвідношення

$$[t_a, t_b] = i f^d_{ab} t_d. \tag{2.5}$$

Матриці t_a реализують представлення алгебри Лі з розмірностю, яка дорівнює числу генераторів групи, тобто $d(G) \times d(G)$. Для групи $SU(2)$ матриці t_a будуть

$$(t_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

або у явному матричному вигляді

$$(t_1)_{bc} = i\varepsilon_{1bc}, \quad t_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(t_2)_{bc} = i\varepsilon_{2bc}, \quad t_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(t_3)_{bc} = i\varepsilon_{3bc}, \quad t_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Це відомі генератори групи обертань, які відповідають спіну 1. Для групи $SU(3)$ генераторами є $T^a = \lambda^a/2$, де λ^a — матриці Гелл-Мана,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Матриці Гелл-Мана безслідові, тобто для них $\operatorname{tr} \lambda^a = 0$. В алгебре $su(3)$ можна виділити 3 незалежні підалгебри $su(2)$: $\{\lambda_1, \lambda_2, X\}$, $\{\lambda_4, \lambda_5, Y\}$, $\{\lambda_6, \lambda_7, Z\}$, де $X.Y, Z$— лінійна комбінація діагональних матриць λ_3 і λ_8. Структурні константи можна порахувати по формулі

2.1. Класифікація алгебр Лі

Найпростішою групою є група $U(1)$ фазових перетворень, $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, з якою ми вже мали справу. Генератор цієї групи пропорційний одиничної матриці, і очевидно комутує із всіма іншими матрицями. Якщо алгебра не містить таких комутуючих елементів, тоді вона називається *напівпростою*. Якщо до того ж елементи алгебри не можуть бути розбіті на два взаємокомутуючих набори, тоді алгебра називаєттся простою.

В загальному випадку аглебра Лі є прямою сумою неабелевих простих компонент і додаткових абелевих компонент, наприклад, Стандартна модель сильних і електрослабких взаємодій має групу симетрії

$$SU(3)_c \otimes SU(2)_f \otimes U(1)_Y, \tag{2.8}$$

а алгебра позначається відповідно

$$su(3) \oplus su(2) \oplus u(1). \tag{2.9}$$

Ми будемо вважати, що число генераторів скінченно і, крім того, матриця, яка складається з генераторів приєднаного представлення (або струкрурних констант),

$$D_{ab} = \mathrm{tr}(T_a T_b) = D_{ba} = -f^c_{ad} f^d_{bc}, \tag{2.10}$$

додатньо визначена (компактність алгебри Лі). Матриця D_{ab} є дійсною для унітарних груп для яких $T^\dagger = T$, і використовується в якості метричного тензора.

Приклад некомпактної алгебри Лі.

$$[t_1, t_2] = -it_3, \quad [t_2, t_3] = it_1, \quad [t_3, t_1] = it_2,$$

$$f^3_{12} = -f^3_{21} = -1, \quad f^1_{23} = -f^1_{32} = 1, \quad f^2_{31} = -f^2_{13} = 1$$

(всі інші нулі). Приведемо явний вигляд ціх матриць

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ t_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D_{ab} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица D_{ab} не є додатньо визначеною, і алгебра Лі некомпактна — це є алгебра Лі некомпактної групи $O(2,1)$ (група Лоренца в розмірності 2+1).

Килінг, Картан (XIX сторіччя) привели повну класифікацію усіх можливих простих компактних алгебр Лі.

Є 4 нескінченних сімейств алгебр $SU(N), O(2n+1), O(2n), Sp(N)$

1. Унітарні перетворення

$$\eta_a \to U_{ab}\eta_b, \quad \xi_a \to U_{ab}\xi_b, \tag{2.11}$$

у комплексному N-вимірному просторі зі скалярним добутком

$$\eta^\dagger \xi = \eta_a^* \xi_a, \quad \eta^\dagger = (\eta_1^*, \ldots, \eta_N^*)$$

. Скалярний добуток зберігається при умові

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1.$$

Усуваючи чисто фазові $U(1)$ перетворення

$$\xi \to e^{i\alpha}\xi,$$

отримуємо просту групу Лі $SU(N)$ — це всі унітарні $N \times N$ матриці, які задовольняють

$$\det U = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr} T^a = 0 \quad \Rightarrow \quad N^2 - 1 \text{ незалежних матриць.}$$

Унімодулярні матриці образують серію A_n : $SU(n+1)$, $n+1 = N$, n — ранг матриці. Ранг алгебри співпадає з числом незалежних діагональних матриць (підалгебра Картана).

Для матриць $N \times N$ які задовольняють співвідношенню $T^\dagger = T$ існує $\frac{N^2-N}{2}$ недіагональних (комплексних) елементів. Тоді дійсних параметрів, з врахуванням $\operatorname{Tr} T = 0$, буде

$$2 \cdot \frac{N^2 - N}{2} + (N-1) = N^2 - 1,$$

тобто, для групи $SU(N)$ маємо $N^2 - 1$ генераторів.

2. Група ортогональних перетворень N-вимірних дійсних векторів (серії $B_n, D_n : SO(2n+1), SO(2n)$).

$$\eta_a \to O_{ab}\eta_b, \quad \xi_a \to O_{ab}\xi_b. \tag{2.12}$$

Ця група зберігає скалярний добуток

$$\eta_a \cdot \xi_a = invariant,$$

що означає

$$O^T O = 1 \quad \Rightarrow \quad \det O = \pm 1.$$

Це група $O(N)$ — група обертань в N вимірах. Якщо $\det O = 1$, то це буде група обертань $SO(N)$.

Матриці O — дійсні, і якщо їх записати у вигляді

$$O = \exp(iA),$$

то матриці A мають властивості

$$A^* = -A, \quad A^\dagger = A, \quad A^T = -A,$$

тобто є $\frac{N(N-1)}{2}$ незалежних матриць, і значить розмірність групи $d(SO(N)) = N(N-1)/2$. Число N повязано з рангом алгебри n: $N = 2n+1$, або $N = 2n$, тому виділяють дві серії $SO(2n+1)$ і $SO(2n)$.

3. Група симплектичних перетворень N-вимірних дійсних векторів (серія C_n).

Це група $N \times N$ перетворень дійсних векторів парним N, яка зберігає антисиметрічнbq внутрішній добуток

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad E_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I \text{ є } \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \text{одинична матриця}, \tag{2.13}$$

і, очевидно, N повинно бути парним. Для симплектичної групи $Sp(N)$ маємо $\frac{N(N+1)}{2}$ генераторів.

Таким чином, розмірність груп

$$d(G) = \begin{cases} N^2 - 1, & SU(N) \\ N(N-1)/2, & SO(N) \\ N(N+1)/2, & Sp(N) \end{cases} \tag{2.14}$$

Є ще 5 виключних алгебр

$$G_2(d = 14),\ F_4(d = 52),\ E_6(d = 78),\ E_7(d = 133),\ E_8(d = 288), \tag{2.15}$$

де в дужках вказана розмірність відповідної групи. Є 4 ізоморфізма між групами

$$SU(2) = SO(3) = Sp(2), \quad Sp(4) = SO(5), \quad SU(4) = SO(6).$$

3. Представлення алгебр Лі.

Поля перетворюються по представленням груп Лі. Для даної групи симетрії G скінечновимірне унітарне представлення задається набором T_a ермітових $d \times d$ матриць ($d(r)$ — розмірність представлення).

Довільне представлення розкладається на суму звідних представлень, яке в визначному базисі має блочно-діагональний вигляд. Генератори t_r^a даного представлення ортонормовані

$$D^{ab} = \mathrm{tr}\left(t_r^a t_r^b\right) = T(r)\delta^{ab},$$

де $T(r)$ — константа для кожного r, і $T(r)$ дійсні числа.

Для структурних коефіцієнтів

$$f_{ab}^c = \frac{1}{iT(r)}\, \mathrm{tr}\left([t_{ar}, t_{br}]t_{cr}\right)$$

Тому f^c_{ab} антисиметрічні по всім індексам і можна не розрізняти верхні і нижні індекси

$$f^c_{ab} \equiv f_{cab}.$$

3.1. Оператор Казиміра.

Квадратичний оператор Казиміра визначається формулою

$$T^2 = T_a T_a,$$

де по індексу a йде сумування. Оператор Казиміра комутує із всіма генераторами

$$[T_b, T_a T_a] = [T_b, T_a]T_a + T_a[T_b, T_a] = if^c_{ba}T_c T_a + iT_a f^c_{ba} T_c = if^c_{ba}\{T_c, T_a\} = 0. \tag{3.1}$$

По леме Шура

$$t_{ar}t_{ar} = C_2(r) \times \mathbb{I}, \tag{3.2}$$

де $\mathbb{I} = d(r) \times d(r)$ — одинична матриця.

Для приєднаного представлення казимір пов'язанi зi структурними константами формулою

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}. \tag{3.3}$$

Беремо

$$\mathrm{tr}\left(t^a_r t^b_r\right) = T(r)\delta^{ab}$$

і згортаємо з δ^{ab}, отримаємо співвідношення між розмірностями групи, $d(G)$, і представлення $d(r)$, казиміром $C_2(r)$ і норміровочними константами $T(r)$:

$$\boxed{d(r)C_2(r) = T(r)d(G).} \tag{3.4}$$

Для $SU(2)$ фундаментальне представлення

$$t_2^a = \frac{\sigma^a}{2},$$

при цьому $\mathrm{tr}(t_2^a t_2^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$.

Для $SU(N)$ вибираємо генератори так, щоб три з них співпадали з генераторами $SU(2)$. Тоді для будь-якої матриці фундаментального представлення

$$\mathrm{tr}(t_N^a t_N^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}.$$

Це фіксує $T(r)$ і $C_2(r)$ для всіх представлень. Дійно, для фундаментального представлення $T(N) = \frac{1}{2}$,

$$NC_2(r) = \frac{1}{2}(N^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}.$$

Для групи $SU(3)$ оператор Казиміра $C_2(3) = 4/3$. Оскільки кварки в квантовій хромодинамиці належать до фундаментального представлення, то для них $C_2(3) = 4/3$. Щоб обчислити оператор Казиміра в приєднаному представленні, побудуємо його із добутку представлень N і $\bar{N}$. Тензорний добуток двух представлень є представлення розмірності $d(r_1) \cdot d(r_2)$ і може бути записан як тензор A_{pq}.

У загальному випадку такий добуток може бути розкладено в пряму суму добутків. Символічно $r_1 \times r_2 = \sum r_i$.

Матриці операторів в представленні $r_1 \times r_2$ дорівнюють

$$t^a_{r_1 \times r_2} = t^a_{r_1} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes t^a_{r_2}.$$

Оператор Казиміра

$$(t^a_{r_1 \times r_2})^2 = (t^a_{r_1})^2 \otimes \mathbb{I} + 2t^a_{r_1} \otimes t^a_{r_2} + \mathbb{I} \otimes (t^a_{r_2})^2.$$

Беремо слід

$$\mathrm{tr}(t^a_{r_1\times r_2})^2 = (C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2)$$

(середній доданок дає нуль.)

З іншого боку

$$\mathrm{tr}(t^a_{r_1\times r_2})^2 = \sum C_2(r_i)d(r_i).$$

Тоді має місце тотожність

$$(C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2) = \sum_i C_2(r_i)d(r_i). \tag{3.5}$$

Використаємо це для добутку представлень $N \times \bar{N}$, яке розкладається на суму двох незвідних представлень

$$N \times \bar{N} = 1 + (N^2 - 1).$$

де одиниця (синглетне представлення) відповідає сліду початкової матриці $N \times N$, а другий доданок - безслідовій матриці що залишилася (приєднане представлення). Використовуючи (3.5),

$$2 \cdot \frac{N^2 - 1}{2N} \cdot N \cdot N = 0 + C_2(G)(N^2 - 1),$$

знаходимо значення оператора Казиміра для приєднананого представлення

$$C_2(G) = N$$

Очевидно, що для приєднаного представлення нормирочний параметр $T(G) = N$.

<u>Задачі.</u>

1. Для матриць Гелл-Мана перевірити справедливість співвідношення ортогональности: $\mathrm{tr}(t_3^a t_3^b) = T(3)\delta^{ab}, \quad t_3^a = \frac{\lambda^a}{2}$, і обчислити константу $T(r)$ в данному представленні.

2. Симетричні і антисиметричні тензори 2-го ранга утворюють незвідні представлення $SU(N)$, тобто

$$N \times N = \underbrace{\left(\frac{N(N-1)}{2}\right)}_{AS} \oplus \underbrace{\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}_{S}$$

Обчислити $C_2(AS)$ і $C_2(S)$.

Перевірити, що результати для $C_2(r)$ задовольняють тотожності для добутку представлень (3.5).

3. Критерій максимально притягувального каналу (МПК).

Сила взаємодії $\sim -\frac{g^2}{2}\left[C_2(r_1) + C_2(r_2) - C_2(r)\right]$, де r_1 і r_2 — представлення кварков, r— представлення зв'язаного стану (всі по кольору). Загальний знак мінус відповідає притяганню, тобто, можливості формування зв'язаного стану.

Обчислити знак і силу взаємодії для каналів кварк-антикварк і кварк-кварк

$3 \times \bar{3} \to 1 \oplus 8, \quad 3 \times 3 \to \bar{3} \oplus 6.$

3.2. Квантування полів Янга – Мілса.

Почнемо з лагранжевої густини для полів Янга - Мілса

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}, \tag{3.6}$$

де тензор напруженості

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{3.7}$$

Імпульс (точніше густина імпульсу) за визначенням є

$$\Pi^a_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{a\mu}} = -\frac{1}{2} F^b_{\lambda\rho} \frac{\partial F^{b\lambda\rho}}{\partial \dot{A}^{a\mu}} = -\frac{1}{2} F^a_{\lambda\rho} \left(\delta^\lambda_0 \delta^\rho_\mu - \delta^\rho_0 \delta^\lambda_\mu\right) = F^a_{\mu 0}. \tag{3.8}$$

Звідси маємо

$$\Pi_0^a = 0, \quad \Pi_i^a = F_{i0}^a = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a - g f^{abc} A_i^b A_0^c = -\partial_0 A_i^a + (D_i A_0)^a. \quad (3.9)$$

Використовуючи означення імпульсів ми можем переписати лагранжеву густину усунувши швидкості (часові похідні)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left[2F_{\mu 0}^a F^{a\mu 0} + F_{ij}^a F^{aij}\right] = -\frac{1}{4}\left[-2\Pi_i^{a^2} + F_{ij}^a F_{ij}^a\right]. \quad (3.10)$$

Відповідно, для гамільтонової густини

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi_\mu^a \dot{A}^{a\mu} - \mathcal{L} = -\Pi_i^a \dot{A}_i^a - \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + \Pi_0^a \dot{A}_0^a \\
&= \Pi_0^a \dot{A}_0^a + \Pi_i^a(\Pi_i^a - D_i^{ac} A_0^c) - \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a \\
&= \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + \Pi_0^a \dot{A}_0^a - \Pi_i^a D_i^{ac} A_0^c \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Для гамільтоніана маємо

$$\mathrm{H} = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + \Pi_0^a \dot{A}_0^a - A_0^c D_i^{ca} \Pi_i^a\right], \quad (3.12)$$

де ми добавили в'язі $\Pi_0^a = 0$ (первинна в'язь) і $D_i^{ab}\Pi_i^b = 0$ (вторинна в'язь) — закон Гауса, оскільки $\Pi_i^b = F_{i0}^b = E_i^b$ і $\vec{E}^b$ є аналогом електричного поля. В останньому доданку проведено інтегрування по частинам. Елементарні дужки Пуасона задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&\{\Pi_\mu^a(\vec{x}), \Pi_\nu^b(\vec{y})\} = 0 = \{A_\mu^a(\vec{x}), A_\nu^b(\vec{y})\}, \\
&\{\Pi_\mu^a(\vec{x}), A_\nu^b(\vec{y})\} = -\delta^{ab} g_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Змінні $\Pi_\mu^a(\vec{x}), A_\nu^b(\vec{x})$ образують фазовий простір Г. Умови $\Pi_0^a = 0$, $D_i^{ab}\Pi_i^b = 0$ виділяюють фазовий підпростір М. Позначаючи

$$\Phi^a(x) \equiv D_i^{ab}\Pi_i^b,$$

можна довести, що ці в'язі задовольняють алгебру

$$\{\Phi^a(\vec{x}), \Phi^a(\vec{y}) = gf^{abc}\Phi^c(x)\delta(x-y). \tag{3.14}$$

Тому Π_0^a і Φ^a — в'язі 1-го роду. Повна гамільтонова густина

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + v_0^a \Pi_0^a + u^a \Phi^a. \tag{3.15}$$

Виберемо калібрувальні умови у вигляді (кулонівська калібровка)

$$A_0^c = 0, \quad \chi_a \equiv \partial_i A_i^a(x) = 0, \tag{3.16}$$

Нетривіальні дужки Пуасона калібровок з в'язями будуть

$$\{A_0^a, \Pi_0^b\} = \delta^{ab}\delta(x-y), \tag{3.17}$$

$$\{\partial_i A_i^a(\vec{x}), D_j^{bc}\Pi_j^c(\vec{y})\} = \partial_i^x D_i^{xab}\delta(x-y) \equiv M^{ab}(x,y). \tag{3.18}$$

Зипишемо функціональний інтеграл у відповідності із загальною теорією сисием з в'язями

$$\begin{aligned} Z &= N\int \mathcal{D}A_0^a\,\mathcal{D}A_i^a\,\mathcal{D}\Pi_0^a\,\mathcal{D}\Pi_i^a \exp i\int dx(\Pi_\mu^a \dot{A}^\mu - \mathcal{H}_T) \\ &\times \delta(A_0^a)\delta(\partial_i A_i^a)\delta(\Pi_0^a)\delta(D_i^{ab}\Pi_i^b)\det\delta^{ab}\delta(x-y)\det M^{ab} \\ &= N\int \mathcal{D}A_i^a\,\mathcal{D}\Pi_i^a \exp i\int dx\left[-\Pi_i^a\dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a\right] \\ &\times \delta(\partial_i A_i^a)\det M^{ab}(x,y)\delta(D_i^{ab}\Pi_i^b). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Для того щоб провести інтегрування по імпульсам скористаємося представленням функціональної делта-функції у вигляді відповідного функціонального інтеграла по A_0^a:

$$\begin{aligned} Z = N\int \mathcal{D}A_i^a\,\mathcal{D}A_0^a\,\mathcal{D}\Pi_i^a \exp i\int dx\left[-\Pi_i^a\dot{A}_i^a - \frac{1}{2}\Pi_i^{a2} - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 - A_0^a D_i^{ab}\Pi_i^b\right] \\ \times \delta(\partial_i A_i^a)\det M^{ab}(x,y). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Інтеграл по імпульсах має гаусову форму, провівши по ним інтегрування отримуємо

$$\boxed{Z = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp i \int dx \left(-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2\right) \delta(\partial_i A_i^a) \det M^{ab}(x,y).} \quad (3.21)$$

[Перевірити, що інтегрування по Π_i^a дійсно приводить до дії полів Янга-Мілса.] Відзначимо присутність в мірі інтегрування в (3.21) детермінанта Фаддеєва-Попова, поряд з дельта-функцією, що фіксує калібровку.

3.3. Квантування калібрувальних теорій Попова – Фаддеєва.

Знов таки, стартуємо із наївної записи функціонального інтеграла для полів Янга-Мілса

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2g^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2\right)\right]. \quad (3.22)$$

Дія інваріантна відносно калібрувальних перетворень

$$A_\mu \to A_\mu^\Omega = \Omega A_\mu \Omega^\dagger - i\Omega A_\mu \Omega^\dagger.$$

Інтеграл Z розбігається при інтегруванні по орбіті A_μ^Ω, навіть в евклідовому формулюванні, тобто для зміни A_μ вдовж орбіти у функціональному інтегралі немає режучого фактора, і Z пропорційно об'єму орбіти $\Pi\mathcal{D}\Omega(x)$. Ідея полягає в тому, що нужно відокремити цей фактор до визначення $Z(J)$, тобто інтеграл треба брати по класам полів. Щоб пояснити проблему розглянемо звичайний інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dxdy\, e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2},$$

який збігається, якщо ми інтегруємо вздовж x, або y, але розбігається, якщо інтегрувати вздовж прямої (орбіти) $x - y = const$. Зробимо заміну змінних $X = x - y$, $Y = x + y$,

$$I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dY dX \, e^{-\frac{1}{2}X^2}.$$

Ми виділили явним чином розбіжність, яка відбувається через інтегрування по Y. Ми хочемо аналогічним чином виділити розбіжність в інтегралі (3.22). Для цього вибирається гіперповерхність (калібрувальна умова)

$$f_a(A_\mu) = 0, \quad a = 1 \ldots n, \tag{3.23}$$

яка перетинає орбіту тільки один раз. Будемо припускати, що для таких полів рівняння

$$f_a(A_\mu^\Omega) = 0 \tag{3.24}$$

має єдиний розв'язок $\Omega = 1$ для даного A_μ. Інтегрування буде проводитись по цій гіперповерхні.

$f_a(A_\mu) = \partial_i A_i^a = 0$ — кулоновська калібровка.

$f_a(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu^a = 0$ — лоренцева калібровка.

Міра залишається інваріантною вздовж орбіти $\mathcal{D}A_\mu^\Omega = \mathcal{D}A_\mu$. Об'єм орбіти $\int \prod\limits_x \mathcal{D}\Omega(x)$ — добуток мер на групах (міра Хаара) в кожній точці x.

Визначимо $\Delta_f(A)$ — функціонал

$$\Delta_f(A) \int \prod_x \mathcal{D}\Omega(x) \delta(f(A^\Omega(x))) = 1, \tag{3.25}$$

який очевидно залежить від поля A_μ і вибранної калібрувальної умови f. Покажемо що функціонал $\Delta(A)$ — калібрувально інваріантен. Порахуемо його для полів, які зв'язані з A_μ калібрувальним перетворенням

$$\Delta_f(A^{\Omega'}) \int \prod_x \mathcal{D}\Omega(x) \delta(f(A^{\Omega'\Omega}(x))) = 1,$$

і, внаслідок інваріантності міри на групі

$$\int \prod_x \mathcal{D}(\Omega'\Omega)(x) = \int \prod_x \mathcal{D}\Omega(x),$$

отримуємо

$$\Delta_f(A^{\Omega'}) = \Delta_f(A). \tag{3.26}$$

Вставимо одиницу (3.25) в

$$\int \mathcal{D}A_\mu \int \prod_x \mathcal{D}\Omega(x) \prod_{x,a} \delta(f(A_\mu^\Omega)) e^{iS(A)} \Delta_f(A).$$

Виконуючи калібрувальне перетворення $A \to A^{\Omega^{-1}}$, і використовуючи інваріантність $\Delta_f(A)$, $S(A)$, $\mathcal{D}[A_\mu]$, приходимо до

$$\int \prod_x \mathcal{D}\Omega(x) \int \mathcal{D}A_\mu \prod_a \delta(f^a(A_\mu)) \Delta_f(A) e^{iS(A)}, \tag{3.27}$$

де об'єм калібрувальної орбіти виділяється в явному вигляді.

Інтеграл (3.27) не залежить від вибору калібрувальної функції f. Дійсно, вставляя одиницу з іншою функцією f', приходимо до (3.27), де f заміняється на f'. Калібрувально інваріантні функції Гріна також не залежить від вибору f, однак звичайні функції Гріна залежать.

<u>Обчислення $\Delta_f(A)$.</u>

Так як $\Delta_f(A)$ домножається на $\prod\limits_{x,a} \delta(f^a(A_\mu))$, то достатньо обчислити його для полів, які задовольняють $f^a(A_\mu) = 0$. Так як за визначенням поверхність, яка задається цією умовою, перетинається з кожною орбітою лише однократно, то (3.25) достатньо обчислити в околі $\Omega(x) = 1$, де

$$\Omega(x) = 1 + i\omega^a T^a,$$

і

$$\prod_x \mathcal{D}\Omega(x) = \prod_{a,x} \mathcal{D}\omega^a.$$

Визначимо оператор M_f, розклпдаючи у функціональний ряд Тейлора і утримуючи лінійний по $\delta\omega^b$ інфінітезимальний доданок

$$\begin{aligned} f^a(A_\mu^\Omega(x)) &= f^a(A_\mu(x)) + \int \frac{\delta f^a(A_\mu^\Omega(x))}{\delta\omega^b(y)}\bigg|_{\omega=0} \delta\omega^b(y)dy \\ &= f^a(A_\mu(x)) + \int dy M_f^{ab}(x,y)\delta\omega^b, \end{aligned} \tag{3.28}$$

де

$$M_f^{ab}(x,y) = \frac{\delta f^a(A_\mu^\Omega(x))}{\delta\omega^b(y)}\bigg|_{\omega=0}. \tag{3.29}$$

Тоді

$$\Delta_f^{-1}(A_\mu) = \int \prod_a \mathcal{D}\omega^a(x)\delta(M^{ab}\delta\omega^b) = \det{}^{-1} M_f^{ab} \tag{3.30}$$

тобто, для функціонала Фаддеєва-Попова маємо

$$\Delta_f(A_\mu) = \det M_f^{ab}. \tag{3.31}$$

Обчислимо цей функціонал в явному вигляді. Враховуючи, що інфінітезимальне перетворення поля A_μ записується як

$$\delta A^\Omega = -\frac{1}{g}D_\mu\omega,$$

розпимуємо варіаційну похідну

$$\begin{aligned} M_f^{ab}(x,y) &= \frac{\delta f^a(A_\mu^\Omega(x))}{\delta\omega^b(y)}\bigg|_{\omega=0} = \int dz \frac{\delta f^a(A_\mu)}{\delta A_\mu^c(z)} \cdot \frac{\delta A_\mu^{c\Omega}(z)}{\delta\omega^b(y)}\bigg|_{\omega=0} \\ &= -\frac{1}{g}\int \frac{\delta f^a(A_\mu)}{\delta A_\mu^c(z)} D_\mu^{zcb}\delta(z-y)dz, \quad D_\mu^{xcb} = \partial_\mu^x\delta^{cb} - gf^{cbd}A_\mu^d(x). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Для лоренцевої калібровки

$$f^a(A_\mu) = \partial_\mu A_\mu^a = 0,$$

одержуємо

$$M_L^{ab}(x,y) = -\partial_x^\mu \delta^{ac} D_{x\mu}^{cb} \delta(x-y) = -\partial^\mu D_{x\mu}^{ab} \delta(x-y)$$
$$= -\left[\Box\delta^{ab} - gf^{abc}\partial_x^\mu \cdot A_\mu^c(x)\right]\delta(x-y) = -\left[\Box\delta^{ab} - gf^{abc}A_\mu^c(x)\partial_{x\mu}\right]\delta(x-y), \tag{3.33}$$

і для кулоновської калібровки,

$$f^a(A_\mu) = \partial_i A_i^a = 0,$$

аналогічно знаходимо

$$M_K^{ab}(x,y) = -\partial_{xi} D_{xi}^{ab}\delta(x-y) = -\left[\nabla^2\delta^{ab} - gf^{abc}A_i^c(x)\partial_{xi}\right]\delta(x-y).$$

Аксіальна калібровка Арновіта – Фінклера

$$f^a(A_\mu) = n^i A_i^a = 0, \quad n_i^2 = 1$$

($n^\mu A_\mu^a = 0,\ n_\mu^2 = 0$— калібровка світлового конуса). Для неї відповідний оператор

$$M_A^{ab}(x,y) = -n^i D_{xi}^{ab}\delta(x-y) = -n^i\left[\partial_{xi}\delta^{ab} - gf^{abc}A_i^c(x)\right]\delta(x-y)$$
$$= -n^i\partial_{xi}\delta^{ab}\delta(x-y) \tag{3.34}$$

не залежить від A_μ.

Формалізуємо виведення

$$\Delta_f^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}\Omega(x)\delta(f^a(A_\mu^\Omega)) =$$
$$= \int \prod_{x,a} \mathcal{D}\omega^a(x)\delta(\omega^b(y)) \cdot \det{}^{-1}\frac{\delta f^a(A^\Omega)}{\delta\omega^b(y)} = \det{}^{-1}\frac{\delta f^a(A^\Omega(x))}{\delta\omega^b(y)}\Big|_{\omega=0}.$$

Тобто, функціонал Фаддеєва-Попова вираховується за формулою

$$\Delta_f(A_\mu) = \det\frac{\delta f^a(A_\mu^\Omega(x))}{\delta\omega^b(y)}\Big|_{\omega=0} = \det\frac{\delta f^a}{\delta A_\mu^c}\cdot\frac{\delta A^{\Omega c}}{\delta\omega^b}\Big|_{\omega=0}.$$

Істотно при цьому, що розв'язок $f^a(A_\mu^\Omega) = 0$ має єдиний розв'язок $\Omega = 1$.

Таким чином, ми *визначаємо* генеруючий функціонал функцій Гріна як

$$Z(J_\mu^a) = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \delta\left(f^a(A_\mu)\right) \Delta_f(A) e^{i\left(S(A) + \int dx J_\mu^a A_\mu^a\right)}. \tag{3.35}$$

Для калібрувально-інваріантних функцій Гріна $X[A]$ маємо загальний вигляд

$$\langle X \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a X[A] \delta(f^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(f^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}. \tag{3.36}$$

Як вже відзначалось, середні для калібрувально-інваріантних величин не залежать від вибору калібрувальної умови, зокрема можна вибрати замість калібровки $f^a = 0$ можна вибрати

$$f^a - C^a(x) = 0, \tag{3.37}$$

де $C^a(x)$ якась довільна функція. При цьому функціонал Фаддеєва-Попова не змінюється

$$\Delta_f(A) = \Delta_{f-c}(A). \tag{3.38}$$

Домножая на

$$\int \mathcal{D}C^a \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int dx (C^a(x))^2\right)$$

чисельник і знаменник в (3.36), і знімая інтегрування по $C^a(x)$ за допомогою дельта-функції, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}C^a \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int dx (C^a(x))^2\right) \int \mathcal{D}A_\mu^a X[A] \delta(f^a - C^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}C^a \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int dx (C^a(x))^2\right) \int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(f^a - C^a) \Delta_f(A) e^{iS(A)}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a X[A] \Delta_f(A) \exp\left[iS(A) - \frac{i}{2\xi}\int dx (f^a(A_\mu))^2\right]}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_f(A) \exp\left[iS(A) - \frac{i}{2\xi}\int dx (f^a(A_\mu))^2\right]}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Для генеруючого функціоналу

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \det M \exp\left[i(S(A) - \frac{i}{2\xi}\int dx (f^a(A_\mu))^2 + \int J_\mu^a(x) A_\mu^a dx)\right], \tag{3.40}$$

де

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}A^a_\mu \det M(A) \exp \left[i(S(A) - \frac{i}{2\xi} \int dx (f^a(A_\mu))^2) \right].$$

Вибіремо лоренцеву калібровку $f^a(A_\mu) = \partial_\mu A^a_\mu$, і представимо детермінант Фаддеєва-Попова у вигляді функціонального інтеграла по грасмановим полям

$$\operatorname{Det} M^{ab}(x,y) = \int \mathcal{D}\bar{\eta}\mathcal{D}\eta \exp i \int d^4x\, d^4y\, \bar{\eta}^a(x) M^{ab}(x,y) \eta^b(y). \tag{3.41}$$

Поля $\eta^a(x)$ називаються "духами"Фаддеєва – Попова, вони перетворюються по приєднаному представленню калібрувальної групи (скалярні поля із статистикою Фермі). Тоді маємо ефективну лагранжеву густину

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^a_\mu)^2 - \bar{\eta}^a \partial^\mu D^{ab}_\mu \eta^b. \tag{3.42}$$

$\operatorname{Det} M^{ab}$ є нелокальним функціоналом A^a_μ. Дійсно, представимо його у вигляді

$$\operatorname{Det} M^{ab} = \exp \operatorname{Tr} \ln M,$$

$$M^{ab}(x,y) = \left[-\Box \delta^{ab} - g f^{abc} A^c_\mu(x) \partial^\mu_x \right] \delta(x-y).$$

Опускаючи тривіальний множник, запишемо

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \ln \frac{M}{-\Box} &= \operatorname{Tr} \ln \left(\frac{-\Box + M + \Box}{-\Box} \right) = \operatorname{Tr} \ln \left(1 - \frac{M + \Box}{\Box} \right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left(\frac{M + \Box}{\Box} \right)^n . \end{aligned} \tag{3.43}$$

Тут ми ввели символичне позначення

$$\frac{1}{\Box_x} \delta(x-y) = D(x-y) \quad \Rightarrow \quad (\Box + i\epsilon) D(x-y) = \delta(x-y),$$

також

$$\langle x | \frac{1}{\Box} | y \rangle = \frac{1}{\Box_x} \delta(x-y).$$

Розглянемо матричний елемент

$$\langle x|\frac{1}{\Box}(M+\Box)|y\rangle = \int dz\langle x|\frac{1}{\Box}|z\rangle\langle z|M+\Box|y\rangle = g\int dz D(x-z)\langle z|\hat{A}_\mu\partial^\mu|y\rangle$$
$$= g\int dz D(x-z)\hat{A}_\mu(z)\partial^{z\mu}\delta(z-y), \tag{3.44}$$

lt

$$\left(\hat{A}_\mu\right)^{ab} = f^{abc}A^c_\mu.$$

Інтегруючи по частинам і знімаючи дельта-функцію, одержимо

$$\langle x|\frac{1}{\Box}(M+\Box)|y\rangle = \partial^\mu_x D(x-y)\hat{A}_\mu(y). \tag{3.45}$$

Тоді

$$\mathrm{Tr}\ln\frac{M}{-\Box} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ig)^n}{n}\,\mathrm{tr}\int dx_1\ldots dx_n\Big[\partial^{\mu_1}_{x_1}D(x_1-x_2)\hat{A}_{\mu_1}(x_2)$$
$$\times\,\partial^{\mu_2}_{x_2}D(x_2-x_3)\hat{A}_{\mu_2}(x_3)\ldots\partial^{\mu_n}_{x_n}D(x_n-x_1)\hat{A}_{\mu_n}(x_1)\Big]. \tag{3.46}$$

Це в точності вираз для однієї ферміонної петлі (відзначимо знак мінус!).

Як вже відзначалось, в квантовій електродинаміці в калібровке Лоренца

$$\bar{\eta}M\eta = -\bar{\eta}\Box\eta,$$

де немає взаємодії з полем A. Тому $\mathrm{Det}\,M$ скорочується в функціях Гріна. Однак, це справедливо не у всіх калібровках.

Нехай

$$f(A) = \partial_\mu A^\mu + A^\mu A_\mu \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Det}\,M = \mathrm{Det}\,\|\Box + 2A^\mu\partial_\mu\|.$$

Роль духов — скоротити внески від часових і поздовжних (нефізичних) компонент калібрувального поля. Наприклад, в нульовому наближенні по константе g, інтегруючи по A_μ і духам, отримуємо (d—розмірність простору-часу)

$$[\mathrm{Det}(-\Box)]^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{Det}(-\Box) = [\mathrm{Det}(-\Box)]^{-\frac{d-2}{2}}, \tag{3.47}$$

тобто, тільки $d-2$ поперечних компонент дають внесок в функціональний інтеграл. Це справедливо у всіх порядках теорії збурень, хоча механізм скорочення внесків від нефізичних компонент буде дещо складнішим.