

1. Інтегральні рівняння Швінгера-Дайсона

Розглянемо діаграми для власної енергії електрона, які можна розбити на два класи: одночастинковонезвідні діаграми (або компактні) і звідні діаграми з'єднані однією ферміонною лінією.

Позначимо $-i\Sigma(p)$ суму всіх компактних діаграм (масовий оператор). Тоді нескінченний ряд всіх діаграм можна представити у вигляді блоків $-i\Sigma(p)$ з'єднаних однією ферміонною лінією

$$\begin{aligned} G(p) &= S(p) + S(p)(-i\Sigma)S(p) + S(-i\Sigma)S(-i\Sigma)S + \dots \\ &= S(p) [1 + (-i\Sigma)S + (-i\Sigma)S(-i\Sigma)S + \dots] \\ &= S \frac{1}{1 - (-i\Sigma)S} = \frac{i}{\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $S(p) = i/(\hat{p} - m_0)$ і $G(p)$ є вільний і точний електронні пропатори, відповідно.

Аналогічно для фотона, де діаграми також можна розбити на компактні (або сильнозв'язані) власноенергетичні діаграми $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ для фотона, і некомпактні діаграми, де блоки $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ з'єднані однією фотонною лінією. Увесь нескінченний ряд діаграм для фотонного пропатора запишеться

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^0 + D_{\mu\lambda}^0(-i\Pi^{\lambda\rho})D_{\rho\nu}^0 + D_{\mu\lambda}^0(-i\Pi^{\lambda\rho})D_{\rho\sigma}^0(-i\Pi^{\sigma\delta})D_{\delta\nu}^0 + \dots, \quad (1.2)$$

і отримуємо рівняння

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^0 + D_{\mu\lambda}^0(-i\Pi^{\lambda\rho})D_{\rho\nu}, \quad (1.3)$$

де вільний пропатор має тензорну структуру

$$D_{\mu\nu}^0(k) = \frac{1}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}, \quad (1.4)$$

а власна енергія фотона є поперечним тензором

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2). \quad (1.5)$$

Тензорну структуру повного фотонного пропагатора можна записати з двома невідомими скілярними функціями $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \quad (1.6)$$

Підставляючи це у рівняння (1.3), маємо рівняння

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2} P_{\mu\nu} + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} = \frac{1}{ik^2} P_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} + \frac{1}{ik^2} (-i)\Pi(k^2) \cdot k^2 \cdot \frac{d(k^2)}{k^2} \cdot P_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

де тензор

$$P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (1.8)$$

і ми скористалися властивістю поперечности цього тензора $k^\mu P_{\mu\nu}(k) = 0$.

Прирівнюючи вирази при незалежних ортогональних тензорах $P_{\mu\nu}(k)$ і $k_\mu k_\nu$, знаходимо, що $d_l(k^2) = \xi$, а $d(k^2)$ визначається з простого рівняння

$$d(k^2) = 1 - \Pi(k^2) \cdot d(k^2) \quad \Rightarrow \quad d(k^2) = \frac{1}{1 + \Pi(k^2)}. \quad (1.9)$$

Як бачимо, повздовжна частина пропагатора (1.6) не міняється внаслідок поперечності тензора $\Pi_{\mu\nu}(k)$.

Суму всіх вершинних частин позначимо $\Gamma_\mu(p', p)$ (у визначення не включаємо пропагатори зовнішніх електронних і фотонних ліній, а також множник $(-ie_0)$).

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p).$$

Визначено також ядро електрон-позитронного розсіяння $K(p, p', q)_{\alpha\beta, \gamma\delta}$. У

визначення K не включені діаграми, які можна розбити на дві, розрізаючи одну фотонну лінію, або дві ферміонні лінії.

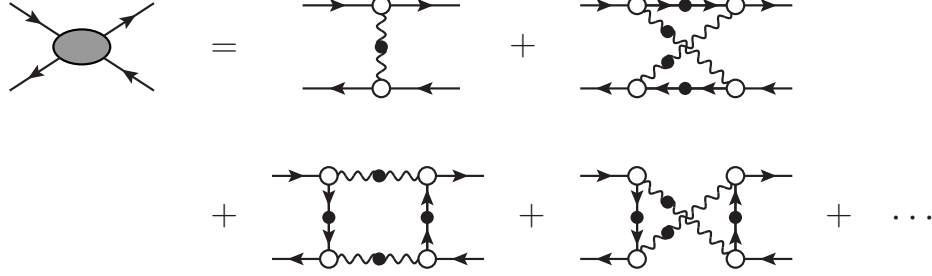


Рис. 1. Представлення електрон-позитронного ядра у вигляді скелетних діаграм з повними пропагаторами і вершинамию

Випишемо інтегральні рівняння, які зв'язують величини Σ , $\Pi_{\mu\nu}$, з повними пропагаторами $G(p)$, $D_{\mu\nu}$, і вершиною Γ_μ .

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k). \quad (1.10)$$

З іншого боку,

$$G^{-1}(p) = \frac{\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)}{i} = S^{-1}(p) + i\Sigma(p) \quad \Rightarrow$$

$$i\Sigma(p) = G^{-1}(p) - S^{-1}(p). \quad (1.11)$$

Отримуємо інтегральне рівняння для ферміонного пропагатора

$$\boxed{G^{-1}(p) = S^{-1}(p) - (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k)}. \quad (1.12)$$

Аналогічно, для вакуумної поляризації

$$-i\Pi_{\mu\nu}(k) = (-ie_0)^2 (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p-k, p) G(p)], \quad (1.13)$$

де в правій частині включен множник -1 для ферміонної петлі у відповідності з правилами Феймана. Для фотонного пропагатора отримаємо інтегральне рівняння

$$D_{\mu\nu}^{-1} = D_{0\mu\nu}^{-1} + i\Pi_{\mu\nu}(k), \quad (1.14)$$

або, у розгорнутому вигляді

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k) = D_{0\mu\nu}^{-1}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p-k, p) G(p)]. \quad (1.15)$$

Рівняння для вершинної частини схематично можна записати як

$$\Gamma = \gamma + \int \Gamma G G \cdot K, \quad (1.16)$$

або у більш розгорнутому вигляді

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(p+q, p) = \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [G(k+q) \Gamma^\mu(k+q, k) G(k)]_{\beta'\alpha'} \times K_{\alpha'\beta', \alpha\beta}(k, k+q, p+q). \quad (1.17)$$

Інтегральні рівняння для ферміонного і фотонного пропагаторів, та вершини зображені на рис.2.

Зауважимо, що ці рівняння не утворюють замкнутої системи рівнянь оскільки рівняння для вершини містить ядро K для якого треба виписати своє рівняння. Фактично, рівняння Швінгера-Дайсона утворюють нескінченну систему інтегральних рівнянь для функцій Гріна з довільним числом ферміонних і фотонних зовнішніх ліній.

2. Рівняння ШД в квантовій електродинаміці з функціонального інтеграла

Генеруючий функціонал має вигляд

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta \right] \right\}, \quad (2.1)$$

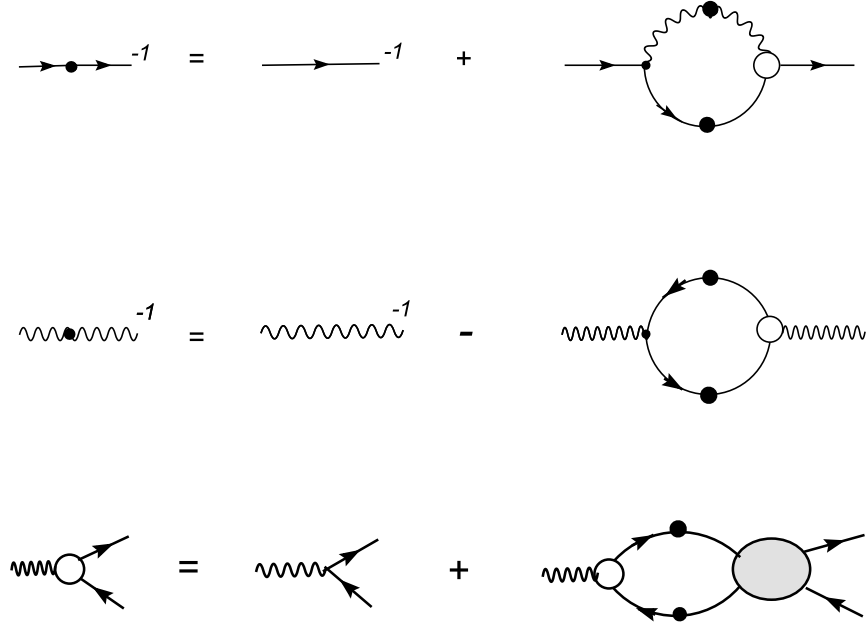


Рис. 2. Рівняння Швінгера-Дайсона (ШД) в КЕД. Повні пропагатори позначені жирною крапкою, повна вершина – світлим кружечком, а ядро K – сірим кружечком.

де $D_\mu = \partial_\mu + ie_0 A_\mu$ коваріантна похідна, а $J, \eta, \bar{\eta}$ – джерела для полів $A_\mu(x), \bar{\psi}(x), \psi(x)$, відповідно. Для сукупності полів і джерел

$$\Phi_l = \{A, \psi, \bar{\psi}\}, \quad J_l = \{J, \eta, \bar{\eta}\},$$

запишемо генеруючий функціонал у загальному вигляді

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\Phi_l e^{iS(\Phi_l, J_l)}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int \mathcal{D}\Phi_l \frac{\delta}{\delta\Phi_l(x)} e^{iS(\Phi_l, J_l)} = 0, \quad (2.2)$$

який дорівнює нулю в силу трансляційної інваріантності функціонального інтегралу. Наприклад, для $\delta/\delta A_\mu(x)$ це буде рівність

$$i \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left\{ \left[g_{\mu\nu} \square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu^x \partial_\nu^x \right] A^\nu(x) - e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x) + J_\mu(x) \right\} e^{iS} = 0.$$

Заміняя поля в дужці $\{ \dots \}$ функціональними похідними по відповідним джерелам, наприклад,

$$A^\mu(x) e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)} = \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}, \quad (2.3)$$

отримуємо функціонально-диференційне рівняння на генеруючий функціонал $Z[J]$:

$$\left\{ \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right]^x \frac{\delta}{i\delta J^\nu(x)} - e_0 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + J^\mu(x) \right\} Z[J] = 0. \quad (2.4)$$

Нагадаємо, що при диференціюванні по грасмановим змінним треба враховувати антикомутативність цих змінних та похідних по ним.

Аналогічно, у випадку ферміонних змінних

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[(i\hat{D} - m)_{\alpha\beta}^x \psi_\beta(x) + \eta_\alpha(x) \right] e^{iS}, \quad (2.5)$$

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \psi_\alpha(x)} = - \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[(i\hat{D} - m)_{\alpha\beta}^x \bar{\psi}_\beta(x) + \bar{\eta}_\alpha(x) \right] e^{iS}, \quad (2.6)$$

ми замінюємо полі на варіаційні похідні

$$\psi_\alpha(x) \Rightarrow \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(x) \Rightarrow -\frac{\delta}{i\delta \eta_\alpha(x)}. \quad (2.7)$$

що дає наступні функціонально-диференційні рівняння

$$\left\{ (i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}^x \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\beta(x)} - e_0 \gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\beta(x)} + \eta_\alpha(x) \right\} Z[J] = 0, \quad (2.8)$$

$$\left\{ (i\hat{\partial} - m)_{\alpha\beta}^x \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + e_0 \gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + \bar{\eta}_\alpha(x) \right\} Z[J] = 0. \quad (2.9)$$

Отримані функціонально-диференційні рівняння для генеруючого функціоналу $Z[J]$ можна записати як нескінченний зацепляючий ланцюжок інтегральних рівнянь для функцій Гріна. Продемонструємо це на прикладі виведення рівняння ШД для фотонного пропагатора. Продиференцуємо

рівняння (2.4) по $\delta/i\delta J^\lambda(y)$ і покладемо всі джерела $J, \eta, \bar{\eta} = 0$. Отримуємо рівняння, яке пов'язує дві кореляційні функції

$$\left[g^{\mu\nu} \square_x - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] \langle 0 | T A_\nu(x) A_\lambda(y) | 0 \rangle + \frac{1}{i} \delta_\lambda^\mu \delta(x-y) + e_0 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x) A_\lambda(y) | 0 \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Тут ми використали, що

$$\frac{\delta^2 Z}{i\delta J^\nu(x) i\delta J^\lambda(y)} \Big|_{J,\eta,\bar{\eta}=0} = \langle 0 | T A_\nu(x) A_\lambda(y) | 0 \rangle, \quad (2.11)$$

$$\frac{\delta^3 Z}{i\delta J^\lambda(y) i\delta \bar{\eta}_\alpha(x) i\delta \eta_\beta(x)} = \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x) A_\lambda(y) | 0 \rangle. \quad (2.12)$$

Визначимо ампутовану 3-х точкову функцію $\Gamma_{\gamma\delta}^\nu(xz|y)$ наступним чином

$$\langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(z) A_\mu(y) | 0 \rangle = -ie_0 \int d^4x' d^4z' d^4y' G_{\alpha\gamma}(x-x') \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(x'z'|y') \times G_{\delta\beta}(z'-z) D_{\nu\mu}(y'-y). \quad (2.13)$$

Внаслідок трансляційної інваріантності величина $\Gamma_{\gamma\delta}^\nu(xz|y)$ залежить від двох різниць координат. Здійснюючи Фур'є перетворення для величин G, D, Γ , одержимо

$$\langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(z) A_\mu(y) | 0 \rangle = -ie_0 \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-z)-iq(x-y)} G_{\alpha\gamma}(p) \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(p, p+q) \times G_{\delta\beta}(p+q) D_{\nu\mu}(q). \quad (2.14)$$

Тоді, прирівнюючи $x = z$, і використовуючи Фур'є-перетворення по $x - y$, рівняння (2.10) стає

$$- \left[g^{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right] D_{\nu\lambda}(k) - ie_0^2 \gamma_{\beta\alpha}^\mu \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_{\alpha\gamma}(p) \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(p, p+k) \times G_{\delta\beta}(p+k) D_{\nu\lambda}(k) + \frac{\delta_\lambda^\mu}{i} = 0, \quad (2.15)$$

або, множачи на обернену матрицю $(D^{-1})^{\lambda\nu}$,

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(k) = (D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[G(p)\Gamma^\nu(p, p+k)G(p+k)\gamma^\mu], \quad (2.16)$$

де матриця

$$(D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) = i \left[g^{\mu\nu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k^\nu \right],$$

є оберненою до матриці

$$D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right].$$

Рівняння (2.16) співпадає з раніше одержаним рівнянням (1.15).

Рівняння ШД для ферміонного пропагатора (1.12) впливає із рівняння (2.8) після диференціювання по $\eta_\gamma(y)$ і покладаючи всі джерела рівними нулю (або із рівняння (2.9) диференціюванням по $\bar{\eta}_\gamma(y)$).

Аналогічно, рівняння для вершинної функції (1.17) отримується з рівняння (2.4) диференціюванням по η і $\bar{\eta}$, покладаючи $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, виконуючи ампутування і переходячи в імпульсний простір.

3. Векторні тотожності Уорда-Такахаші

В функціональному інтегралі зробимо заміну змінних, які відповідають локальному калібрувальному перетворенню

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \quad (3.1)$$

Доданки в лагранжіані, які змінюються при калібрувальних перетвореннях, мають вигляд

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu + \square\alpha)^2 + J^\mu (A_\mu + \partial_\mu\alpha) + \bar{\eta} e^{-ie\alpha} \psi + \bar{\psi} e^{ie\alpha} \eta \\ & \sim - \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^\mu \square\alpha - \alpha \partial_\mu J^\mu - ie\alpha \bar{\eta} \psi + ie\alpha \bar{\psi} \eta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де в останньому виразі ми зберегли лінійні, інфінітезімально малі члени.

Таким чином, в першому порядку по α маємо

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[\frac{1}{\xi} \square \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu J^\mu(x) + ie\bar{\eta}\psi(x) - ie\bar{\psi}\eta(x) \right] e^{iS(J,\bar{\eta},\eta)} = 0. \quad (3.3)$$

Заміняючи поля на функціональні похідні, отримуємо тотожність, яка є наслідком калібрувальної інваріантності теорії,

$$\boxed{\left[\frac{1}{\xi} \square^x \partial_\mu^x \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} + \partial_\mu^x J^\mu(x) + ie\bar{\eta}_\alpha(x) \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} - ie\eta_\alpha(x) \frac{\delta}{i\delta \eta_\alpha(x)} \right] Z[J] = 0.} \quad (3.4)$$

З цієї функціональної тотожності можна отримати безліч тотожностей для кореляційних функцій, які містять зовнішні фотонні лінії.

Наприклад, продиференціюємо (3.4) по $J_\nu(y)$ і покладемо $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, отримуємо

$$\frac{1}{\xi} \square^x \partial_\mu^x \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle + \frac{1}{i} \partial_\nu^x \delta(x - y) = 0. \quad (3.5)$$

В імпульсному просторі це еквівалентно

$$k^\mu D_{\mu\nu}(k) = \xi \frac{k_\nu}{ik^2}. \quad (3.6)$$

Загальна структура фотонного пропагатора

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \quad (3.7)$$

містить дві невідомі функції $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$. Тотожність означає, що одна з них зафіксована

$$d_l(k^2) = \xi.$$

Так як з (3.6) для оберненого пропагатора очевидно

$$k^\nu D_{\nu\mu}^{-1}(k) = \frac{ik^2 k_\mu}{\xi},$$

і для вільного пропагатора маємо аналогічну рівність

$$k^\nu D_{0\nu\mu}^{-1}(k) = \frac{ik^2 k_\mu}{\xi},$$

то з рівняння ШД

$$D_{\mu\nu}^{-1} = D_{0\mu\nu}^{-1} + i\Pi_{\mu\nu}$$

отримуємо тотожність для поляризаційного оператора

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2), \quad (3.8)$$

яка визначає тензорну структуру цієї величини з однією скалярною функцією $\Pi(k^2)$.

Тепер продиференціюємо тотожність (3.4) по $\frac{\delta}{i\delta\eta_\beta(y)}$, $\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_\gamma(z)}$ при $J = \eta = \bar{\eta} = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \square^x \partial_\mu^x \langle 0 | T A_\mu(x) \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle + e \langle 0 | T \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle \delta(x - z) \\ & - e \langle 0 | T \psi_\gamma(z) \bar{\psi}_\beta(z) | 0 \rangle \delta(x - y) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Знов вводячи ампутовану вершинну функцію, і виконуючи перетворення Фур'є, отримуємо тотожність Уорда-Такахаші

$$\boxed{(-i)k^\mu \Gamma_\mu(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p)}. \quad (3.10)$$

Диференціюючи цю тотожність за фотонним імпульсом k^μ при $k^\mu = 0$, і приймаючи до уваги зв'язок повного ферміонного пропагатора з власною енергією, одержимо, що повна вершина при нульовому фотонному імпульсі задовольняє

$$\boxed{\Gamma_\mu(p, p) = i \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}}. \quad (3.11)$$

Це так звана диференційна тотожність Уорда.

4. Аксіальна тотожність Уорда-Такахаші

Розглянемо функціональний інтеграл для повного ферміонного пропагатора в квантовій електродинаміці

$$G(x_1 - x_2) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)} \quad (4.1)$$

з дією

$$S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\hat{D} - m) \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right],$$

де норміровочний множник

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}.$$

Зробимо наступну заміну змінних в чисельнику функціонального інтеграла

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)\gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi} e^{i\theta(x)\gamma_5}, \quad (4.2)$$

або в інфінітезімальній формі

$$\psi(x) \simeq (1 + i\theta(x)\gamma_5) \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi} (1 + i\theta(x)\gamma_5). \quad (4.3)$$

Ферміонна частина лагранжіану при цьому змінюється наступним чином (з точністю до членів лінійних по θ)

$$\begin{aligned} & \bar{\psi} e^{i\theta\gamma_5} (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) e^{i\theta(x)\gamma_5} \psi \simeq i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m \\ & - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \partial_\mu \theta - 2i\theta(x) m \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оскільки початковий інтеграл не залежав від θ , очевидно варіація по θ повинна дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta_\theta (e^{iS} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)) \\ & \simeq \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \int d^4x \{ [-i\partial_\mu \theta(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + 2\theta(x) m \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x)] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \\ & + i\theta(x_1) \gamma_5 \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) + i\theta(x_2) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_5 \} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Звідси, для кореляційних функцій маємо тотожність

$$i\partial_\mu \langle 0 | T \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = -2m \langle 0 | T \bar{\psi} \gamma_5 \psi(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle \\ - i\delta(x - x_1) \gamma_5 \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle - i\delta(x - x_2) \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle \gamma_5. \quad (4.6)$$

Визначимо ампутовані вершини $\Gamma_{\mu 5}$ і Γ_5 аналогічно тому як це зроблено в рівняннях (2.13) і (2.14),

$$\langle 0 | T \bar{\psi}(-i\gamma_\mu \gamma_5) \psi(x) \psi(x_1) \psi(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-x_1)+ik(x-x_2)} \\ \times G(p) \Gamma_{\mu 5}(p, k) G(k), \quad (4.7)$$

$$\langle 0 | T \bar{\psi}(-i\gamma_5) \psi(x) \psi(x_1) \psi(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-x_1)+ik(x-x_2)} \\ \times G(p) \Gamma_5(p, k) G(k). \quad (4.8)$$

Отримуємо аксіально-векторну тотожність Уорда-Такахаші, яка пов'язує вершини $\Gamma_{\mu 5}$, Γ_5 і ферміонний пропагатор G :

$$\boxed{(k - p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = \gamma_5 G^{-1}(p) + G^{-1}(k) \gamma_5 + 2m_0 \Gamma_5(p, k)}. \quad (4.9)$$

У випадку безмасових ферміонів ($m_0 = 0$) і враховуючи матричну структуру повного пропагатора,

$$G^{-1}(p) = -i[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)], \quad (4.10)$$

тотожність (4.9) приймає вигляд

$$(k - p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = -i \left\{ \gamma_5 [\hat{p}A(p^2) - B(p^2)] + [\hat{k}A(k^2) - B(k^2)] \gamma_5 \right\}. \quad (4.11)$$

В границі коли $k \rightarrow p$

$$\lim_{k \rightarrow p} (k - p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p, k) = 2i\gamma_5 B(p^2). \quad (4.12)$$

Звідси випливає, що вершина $\Gamma_{\mu 5}(p, k)$ повинна мати полюс при $(k-p)^2 = 0$:

$$\Gamma_{\mu 5}(p, k) \approx 2i\gamma_5 B(p^2) \frac{(k-p)_\mu}{(k-p)^2}, \quad k \rightarrow p. \quad (4.13)$$

Легко перевірити тотожність для вільних вершин і пропагаторов, які мають вигляд

$$\Gamma_{\mu 5} = -i\gamma_\mu \gamma_5, \quad G^{-1}(p) = \frac{\hat{p} - m_0}{i}, \quad \Gamma_5 = -i\gamma_5,$$

Очевидно, тотожність задовольняється

$$(k-p)^\mu (-i\gamma_\mu \gamma_5) = \gamma_5 \frac{\hat{p} - m_0}{i} + \frac{\hat{k} - m_0}{i} \gamma_5 - 2im_0 \gamma_5.$$

5. Аномальна кіральна тотожність Уорда-Такахаші

При виведенні кіральної тотожності Уорда-Такахаші ми вважали інваріантною міру інтегрування при заміні (4.2), однак це не так. Японський фізик К. Фуджикава перший показав, що ферміонна міра не є інваріантною відносно заміни ферміонних змінних, які мають вигляд кіральних перетворень, тобто заміни

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha(x)\gamma_5}, \quad (5.1)$$

де $\alpha(x) = \alpha^a(x)T^a$ у випадку неабельових симетрій з генераторами T^a . Достатньо розглянути тільки інтегрування по ферміонам в функціональному інтегралі

$$Z = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} i\hat{D}\psi \right]. \quad (5.2)$$

Розкладемо полі ψ по базису власних функцій ермітова оператора $i\hat{D}$,

$$i\hat{D}\Phi_m = \lambda_m \Phi_m, \quad \bar{\Phi}_m i\hat{D} = -iD_\mu \Phi_m \gamma^\mu = \lambda_m \bar{\Phi}_m. \quad (5.3)$$

Власні цього оператора є дійсними і у відсутності калібрувального поля ($A_\mu = 0$) задовольняють умові

$$\lambda_m^2 = k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2. \quad (5.4)$$

Для фіксованого A_μ ці значення є також асимптотичною формою власних значень λ_m при великих k . Ортонормовані власні функції ермітова оператора $i\hat{D}$ утворюють повну систему, тобто задовольняють

$$\int d^4x \bar{\Phi}_n(x) \Phi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (5.5)$$

$$\sum_n \Phi_{n\alpha}(x) \bar{\Phi}_{n\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y), \quad (5.6)$$

де n і m узагальнюють сукупність усіх квантових чисел, які включають як дискретні, так і неперервні числа; α, β є спіновими індексами. Розкладемо поля по повній системі функцій $\bar{\Phi}_n(x)$ (узагальнений ряд Фур'є):

$$\psi(x) = \sum_m a_m \Phi_m(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{a}_m \bar{\Phi}_m, \quad (5.7)$$

де коефіцієнти a_n, \bar{a}_m є грасмановими змінними, так само як і поля $\psi, \bar{\psi}$.

Використовуючи ортонормованість $\bar{\Phi}_n(x)$, знаходимо

$$a_n = \int d^4x \bar{\Phi}_n(x) \psi(x), \quad \bar{a}_n = \int d^4x \Phi_n(x) \bar{\psi}(x). \quad (5.8)$$

Ферміонну міру можна записати як

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_m da_m d\bar{a}_m. \quad (5.9)$$

При виводі тотожності достатньо розглянути інфінітезимальну заміну. Якщо $\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x)$, де у випадку неабелевих симетрій $\alpha(x) = T^a \alpha^a(x)$, то коефіцієнти розкладу зв'язані наступним інфінітезимальним лінійним перетворенням

$$a'_m = \sum_n \int d^4x \bar{\Phi}_m(1 + i\alpha(x)\gamma_5)\Phi_n a_n = \sum_n (\delta_{mn} + C_{mn}) a_n. \quad (5.10)$$

Тоді ферміонна міра перетворюється при кіральної заміні змінних як

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = J^{-2} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad C_{mn} = \int d^4x \bar{\Phi}_m i\alpha(x) \gamma_5 \Phi_n(x),$$

де J — детермінант якобіана перетворення $1 + C$. Для інфінітезімальних параметрів $\alpha(x)$ можна записати

$$J = \det(1 + C) = e^{\text{tr} \ln(1+C)} = e^{\sum_n C_{nn}},$$

або

$$\ln J = i \int d^4x \alpha^a(x) \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a \Phi_n(x). \quad (5.11)$$

Формально, використовуючи повноту функцій $\Phi_n(x)$, маємо

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a \Phi_n(x) = \underbrace{\text{tr}(\gamma_5 T^a)}_{=0} \underbrace{\delta(x-x)}_{=\infty}. \quad (5.12)$$

тобто виникає невизначеність типу $0 \times \infty$. Суму в останньому виразі потрібно попередньо регуляризувати калібрувально-інваріантним чином

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a \Phi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a \Phi_n(x) e^{\lambda_n^2/M^2}. \quad (5.13)$$

(Після віковського поворота знак λ_n^2 буде від'ємним). Беручи до уваги, що λ_n^2 є власним значенням оператора $(i\hat{D})^2$, запишемо, використовуючи повноту Φ_n :

$$\begin{aligned} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a \Phi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \bar{\Phi}_n(x) \gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2} \Phi_n(x) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[\gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2} \right] \delta(x-y) \Big|_{x=y}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Використовуючи ынтегральне представлення для дельта-функції дію на неї нашого оператора представимо

$$\begin{aligned} e^{(i\hat{D})^2/M^2} \delta(x-y) \Big|_{x=y} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} e^{\frac{k^2}{M^2} + 2i\frac{k \cdot D}{M^2} - \frac{\hat{D}^2}{M^2}} \Big|_{x=y} \\ &= M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2} e^{2i\frac{k \cdot D}{M} - \frac{\hat{D}^2}{M^2}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В границі $M \rightarrow \infty$ внесок дадуть тільки ті доданки розкладу експоненти, які містять не менш 4-х гама-матриць, тому

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[\gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2} \right] \delta(x-y) \Big|_{x=y} = \text{tr} \left[\gamma_5 T^a \cdot \frac{1}{2} \hat{D}^4 \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k^2}. \quad (5.16)$$

Після віковського повороту $k_0 = ik_4$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k^2} = i \int_E \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} = \frac{i}{(2\pi)^4} \pi^2 = \frac{i}{16\pi^2}.$$

Для обчислення следа врахуємо, що

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \\ (i\hat{D})^2 = -D_\mu^2 - \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2},$$

тобто із \hat{D}^4 внесок дає тільки

$$\text{tr} \left[\gamma_5 T^a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)^2 \right] \cdot \frac{i}{16\pi^2} = \frac{ig^2}{4 \cdot 32\pi^2} \text{tr}(T^a T^b T^c) \text{tr}(\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho}) F^{b\mu\nu} F^{c\lambda\rho} \\ = -\frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}. \quad (5.17)$$

При обрахуванні останньої рівності ми використали наступний слід гама-матриць

$$\text{tr}(\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho}) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

В результаті

$$J = \exp \left[-\frac{ig^2}{32\pi^2} \int d^4 x \alpha^a(x) \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} \right],$$

і генеруючий функціонал після заміни змінних і враховуючи варіацію дії, приймає вигляд

$$Z = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4 x \left[\bar{\psi} i\hat{D}\psi + \alpha^a \partial_\mu j_5^{a\mu} + \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4 x \alpha^a(x) \text{tr}(T^a T^b T^c) \right. \right. \\ \left. \left. \times \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{b\mu\nu} F^{c\lambda\rho} \right] \right\}. \quad (5.18)$$

Оскільки це лише заміна змінних, то вона не міняє значення інтеграла при будь-якій α , тоді, розкладаючи по інфінітезімальним $\alpha(x)$ і прирівнюючи нулеві вираз при довільному $\alpha(x)$, знаходимо для середнього значення дивергенції струму

$$\langle \partial_\mu j_5^{a\mu} \rangle = -\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}(T^a T^b T^c) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{b\mu\nu} F^{c\lambda\rho} = -\frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr}(T^a \{T^b, T^c\}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{b\mu\nu} F^{c\lambda\rho}, \quad (5.19)$$

де кіральний струм визначений як

$$j_5^{a\mu} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi.$$

Для дійсних представлень стверджується рівність $T_a^T = -T_a$, для них коефіцієнти d_{abc} щезають

$$d_{abc} = \text{tr}(T_a \{T_b, T_c\}) = \text{tr}(T_a^T \{T_b^T, T_c^T\}) = -d_{abc} = 0,$$

тобто аномальна права частина зникає, і кіральний ток зберігається.

Якщо робити кіральну заміну в (5.1) з одиничною матрицею замість матриць T^a (абельові кіральні заміни для ферміонів), то кіральний струм буде $j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$. Позначаючи величину

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}) = \frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*),$$

яка називається густиною Черна-Понтрягіна, для синглетного струму маємо аномальну дивергенцію

$$\langle \partial^\mu j_{\mu 5}(x) \rangle = -g^2 \mathcal{A}(x). \quad (5.20)$$

Ми вже показували, що

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}) = 8\partial_\lambda K^\lambda,$$

$$K^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \text{tr}(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda).$$

Тому можна було б ввести новий зберігаючий струм

$$J_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \frac{g^2}{2\pi^2} K^\mu,$$

але він не калібрувальньо інваріантен.

Аномалія в дивергенції кірального струма приводить до незбереження кірального заряду

$$Q_5 = \int d^3x j_{05}(x). \quad (5.21)$$

Дійсно, інтегруючи вираз (5.20) по чотиривимірному об'єму, отримуємо зміну заряду для топологічно нетривіальних конфігурацій калібрувального поля

$$\Delta Q_5 = \int_{-\infty}^{\infty} dt (\partial_0 Q_5) = -g^2 \int d^4x \mathcal{A}(x) = n.$$

В КЕД для дивергенції кірального струму маємо

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \quad (5.22)$$

Цей вивід узагальнується для простору-часу довільної парної розмірності.

В розмірності $d = 2n$

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = (-1)^{n+1} \frac{2e^n}{n!(4\pi)^n} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2n}} F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}}. \quad (5.23)$$

Для двовимірної електродинамики, $n = 1$, $d = 2$,

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = \frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

вираз, який ми отримували раніше.

В загальному випадку струм для кіральних перетворень довільної групи G ,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha^i(x) T^i \gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha^i(x) T^i \gamma_5}, \quad (5.24)$$

буде

$$j_{\mu 5}^i = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^i \psi,$$

де матриця T^i (генератор групи G) діє на індекси поля відмінні від кольорових, наприклад, флейворні індекси. Повторюючи аналогічним чином аналітичні розрахунки, одержимо

$$\langle \partial^\mu j_{\mu 5}^i \rangle = -\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}(T^i T^a T^b) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{a\mu\nu} F^{b\lambda\rho}.$$

Наприклад, при кіральних перетвореннях u і d кварки перетворюються

$$u \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} u, \quad d \rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5} d, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

і відповідний кіральний струм має вигляд

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_3 \psi = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d,$$

де матриця $T = \tau_3$. Аномалія скорочується оскільки $\text{tr}(\tau_3 T^a T^b) = \text{tr}(\tau_3) \text{tr}(T^a T^b) = 0$ ($\text{tr}(\tau_3) = 0$). Це буде справедливо і для кірального струму $j_{\mu 5}^i = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 t^i \psi$, який відповідає групі $SU(N)$ перетворень N флейворів

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha^i t^i \gamma_5} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha^i t^i \gamma_5},$$

$\text{tr} t^i = 0$. Таким чином, глюонні доданки в кіральному струмі для групи $SU(N)$ відсутні.

З іншого боку, при наявності електромагнітного поля ці струму мають аномалію, наприклад ($D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, q — зарядова матриця кварків) величина $\mathcal{A}(x)$ в цьому випадку буде

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} \text{tr}\{q^2 \tau_3\},$$

де tr включає також слід по кольоровим індексах. Підраховуючи слід матриць

$$\text{tr}\{q^2\tau_3\} = N_c \left(\frac{2e}{3}\right)^2 \cdot (+1) + N_c \left(-\frac{e}{3}\right)^2 \cdot (-1) = \frac{N_c e^2}{3},$$

де N_c – розмірність кольорової групи ($N_c = 3$ в квантовій хромодинаміці), отримуємо для дивергенції кірального струму

$$\partial^\mu \langle \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_3 \psi \rangle = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}. \quad (5.25)$$

Ця аномалія (Адлера-Белла-Джекківа) проявляється у розпаді $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Співвідношення ($N_c = 3$)

$$\partial_\mu j_5^\mu = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho},$$

а також (5.25), насправді є операторною тотожністю справедливою у всіх порядках теорії збурень (тобто радіаційні поправки до неї вищих порядків дорівнюють нулю). Це є сутність так званої теореми Адлера-Бардіна.

Інстантонні розв'язки для топологічно нетривіальних конфігурацій калібрувального поля $A_\mu(x)$ призводять до глобального незбереження кірального заряду Q_5 внаслідок аномалії в дивергенції кірального струму.