1. Однопетльова перенорміровка в КЕД (перенорміровка маси, заряду і хвильових функцій), контр-членний підхід

Для Фур'є перетворення функції Гріна $G(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ нескінченний ряд фейманівських діаграм може бути записаний через власну енергію $\Sigma(p)$ (див. рис.1):

$$
\begin{aligned}
& G(p) = \frac{i}{\hat{p}-m} + \frac{i}{\hat{p}-m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\hat{p}-m} + \ldots] \\
& = \frac{i}{\hat{p}-m}\left(1 + \Sigma(p)\frac{1}{\hat{p}-m} + \Sigma(p)\frac{1}{\hat{p}-m}\Sigma(p)\frac{1}{\hat{p}-m} + \ldots\right) \\
& = \frac{i}{\hat{p}-m}\frac{1}{1-\Sigma(p)\frac{1}{\hat{p}-m}} = i(\hat{p}-m)^{-1}\left[1-\Sigma(p)(\hat{p}-m)^{-1}\right]^{-1} \\
& = i\left[\left(1-\Sigma(p)(\hat{p}-m)^{-1}\right)(\hat{p}-m)\right]^{-1} = i(\hat{p}-m-\Sigma(p))^{-1} \\
& = \frac{i}{\hat{p}-m-\Sigma(p)}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

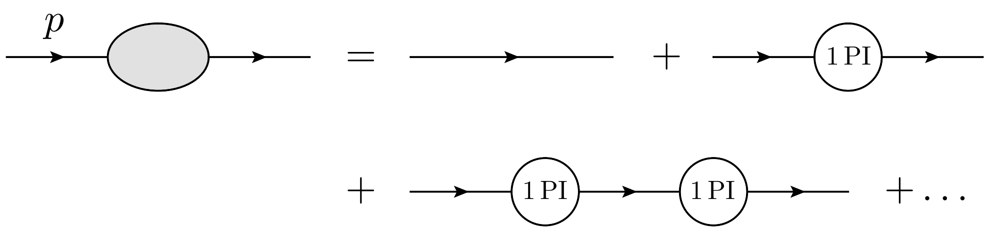

Рис. 1. Повний пропагатор електрона в термінах власної енергії.

До $\Sigma(p)$ ми відносимо нескінченний ряд одночастинковонезвідних діаграм, тобто, діаграм, які неможливо розділити на дві окремі розрізаючи всього одну ферміонну лінію (див. рис.2).

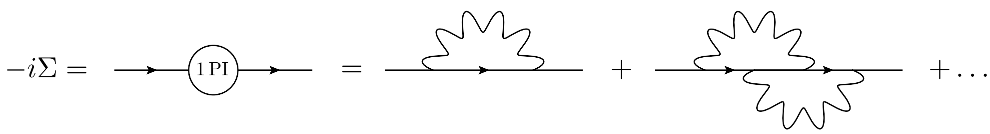

Рис. 2. Одночастинковонезвідні діаграми власної енергії електрона.

В контр-членному підході вважається, що маса m и заряд e, присутні в лагранжіані, є скінченними. "Ідеологія" перенормування полягає в тому, щоб добавити до початкового лагранжіану контрчлени (розбіжні) такі, щоб скомпенсувати розбіжності власної енергії, поляризації вакуума і вершини. Тобто, ми вважаємо, що ми не знаємо теорію (лагранжіан), що описує фізику на малих відстаннях (великих енергіях і імпульсах), і маємо "підправити"лагранжіан таким чином, щоб усунути розбіжності, які виникають в теорії збурень.

Почнемо з ферміонної частини лагранжіана. До кінетичної частини,

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{1.2}$$

додамо контрчлени

$$\Delta\mathcal{L}_{1ct} = iB\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi, \tag{1.3}$$

які мають таку ж саму структуру (чому саме таку, стане ясно пізніше). В результаті будемо мати голий лагранжіан

$$(\mathcal{L}_1)_B = \mathcal{L}_1 + \Delta\mathcal{L}_{1ct} = i(1+B)\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi.$$

Виберемо тепер A і B так, щоб електронний пропагатор був скінченим з точністю до e^2. Добавки будемо розглядати, як доданки взаємодії Вимагаємо щоб $\Sigma(p) + A - B\hat{p} =$ була скінченою величиною, тобто,

$$\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}(-\hat{p} + 4m) + A - B\hat{p} = \text{скінчена величина.} \tag{1.4}$$

В розмірній регуляризації розбіжності проявляються як полюси при $n = 4$, коли розмірність простору-часу прямує до 4. В найнижчому порядку теорії збурень власна енергія вже була порахована. Знаходимо, з точностю до скінчених величин,

$$A = -\frac{e^2 m}{2\pi^2(4-n)}, \qquad B = -\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}. \tag{1.5}$$

Визначемо розбіжну константу

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}, \tag{1.6}$$

і нову “голу” хвильову функцію

$$\psi_B = \sqrt{Z_2}\psi.$$

Тоді лагранжіан $\mathcal{L}_{1B}$ можна переписати в термінах голих полів і маси

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1B} &= i\bar{\psi}_B\hat{\partial}\psi_B - (m+A)Z_2^{-1}\bar{\psi}_B\psi_B \\ &= i\bar{\psi}_B\hat{\partial}\psi_B - m_B\bar{\psi}_B\psi_B,\end{aligned} \tag{1.7}$$

де гола (розбіжна) маса

$$
\begin{aligned}
m_B &= (m+A)Z_2^{-1} = m\left(1-\frac{e^2}{2\pi^2(4-n)}\right)\left(1-\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\right)^{-1} \\
&\simeq m\left(1-\frac{e^2}{2\pi^2(4-n)}\right)\left(1+\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\right) = m\left(1-\frac{3e^2}{8\pi^2(4-n)}\right) \\
&= m-\delta m. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Величини з індексами B є голі величини, без врахування взаємодії, ψ, m — відносяться до *фізичного* електрону. Відзначимо, що лагранжіан $\mathcal{L}_{1B}$, виражений в термінах голих величин, має таку саму форму, як і лагранжіан $\mathcal{L}_1$. Тобто, перенормування зберігає форму вихідного лагранжіану.

Ясно, що голий пропагатор $\langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle$ зв'язан з пропагатором фізичних полів співвідношенням

$$
G_B(x-y) = \langle 0|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(y)|0\rangle = Z_2\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = Z_2 G_r(x-y). \qquad (1.9)
$$

Для Фур'є перетворення повного фотонного пропагатора,

$$
D_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle, \qquad (1.10)
$$

аналогічно маємо нескінченний ряд, зображений графічно на рис.3:

$$
D_{\mu\nu}(k) = D_{0\mu\nu}(k) + D_{0\mu\alpha}(k)(-i\Pi^{\alpha\beta}(k))D_{0\beta\nu}(k) + \ldots. \qquad (1.11)
$$

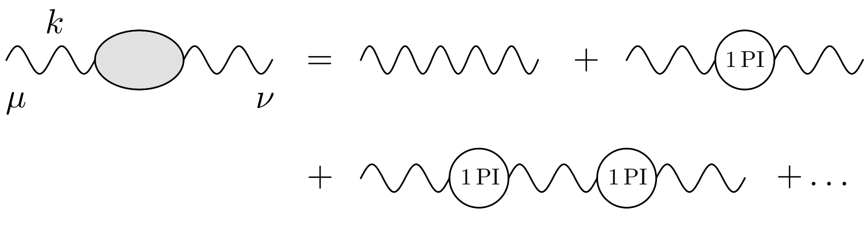

Рис. 3. Повний пропагатор фотона в термінах власної енергії.

Тут

$$
D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} \qquad (1.12)
$$

є пропагатор вільного поля, і поляризаційний оператор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ (вільна енергія фотона) є поперечним, що є наслідком калібрувальної інваріантності $k^\mu\Pi_{\mu\nu}(k) = k^\nu\Pi_{\mu\nu}(k) = 0$:

$$
\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2) = \left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)k^2\Pi(k^2) \qquad (1.13)
$$

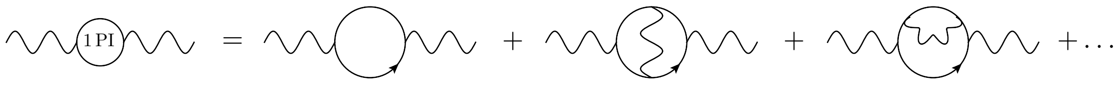

Рис. 4. Одночастинковонезвідні діаграми власної енергії фотона.

Поляризаційний оператор включає тільки одночастинковонезвідні діаграми (див. рис.4).

Тоді, використовуючи поперечність тензора $g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$, отримаємо

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\frac{1}{ik^2} + \frac{1}{ik^2}(-ik^2\Pi(k))\frac{1}{ik^2} + \dots\right) \\ &+ \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{ik^2}\left(1 - \Pi(k^2) + \dots\right) + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} \\ &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{ik^2}\frac{1}{1+\Pi(k^2)} + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

В нашому випадку, в найнижчому порядку теорії збурень, для поляризаційного оператора запишемо, виділяючи розбіжність,

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)} + \Pi_f(k^2), \tag{1.15}$$

де $\Pi_f(k^2)$ - скінченна частина. В початковий лагранжіан

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu) \tag{1.16}$$

добавимо контрчлен

$$\mathcal{L}_{2ct} = -\frac{C}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{2}A^\mu(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu. \tag{1.17}$$

таким чином, щоб усунити розбіжність в поляризації вакуума. Тоді

$$(\mathcal{L}_2)_B = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{2ct} = -\frac{Z_3}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad Z_3 = 1 + C.$$

В імпульсному просторі це дасть додаткову вершину $-iC(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)$. Тому в порядку e^2 вимагаємо, щоб $\Pi(k^2) + C$ була скінченою величиною.

Тоді знаходимо

$$C = -\frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \qquad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}. \tag{1.18}$$

Визначимо $A^\mu_B = Z_3^{1/2}A^\mu$, тоді $\mathcal{L}_2 + (\mathcal{L}_2)_{CT}$ можна переписати у вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}Z_3^{-1}(\partial^\mu A_{\mu B})^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_B}(\partial_\mu A^\mu_B)^2, \qquad \xi_B = Z_3\xi. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Неперенормований і перенормований пропагатори фотона, в термінах голих і фізичних полів, зв'язані мультиплікативно

$$D_{\mu\nu} \sim \langle 0|TA_{\mu B}A_{\nu B}|0\rangle \sim Z_3\langle 0|TA_\mu A_\nu|0\rangle = Z_3 D_{r\mu\nu}, \tag{1.20}$$

$D_{r\mu\nu}$ — перенормований фотоний пропагатор, він дорівнює

$$D_{r\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{ik^2}\frac{1}{1+\Pi_f(k^2)} + \text{члени прпопорційні}\,\xi. \tag{1.21}$$

Очевидно, маса фотона дорівнює нулю, оскільки полюс при $k^2 = 0$ зберігається.

Перенормування позбавляє нас від скінчених доданків, але залишає скінченні доданки, що призводить до спостережуваних фізичних ефектів.

Звернемось тепер до вершиної функції, яку в імпульсному просторі представимо у вигляді $\Gamma^\mu(p,p') = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p,p')$, де p і p' імпульси електрона. У найнижчому порядку теорії збурень поправка до голої вершини описується другою діаграмою на рис.5.

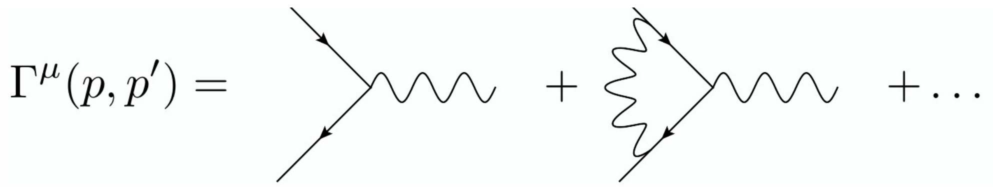

Рис. 5. Поправка до вершини.

Її розбіжна частина, $\Lambda_\mu^{(1)}$, при n, що прямує до 4, має вигляд

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\gamma_\mu. \tag{1.22}$$

Цю розбіжність можна усунути, додавши до лагранжіану взаємодії

$$\mathcal{L}_{int} = -e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \tag{1.23}$$

контрчлен виду

$$\mathcal{L}_{3ct} = -De\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \tag{1.24}$$

що дає додаткову вершину $-ie\mu^{2-\frac{n}{2}}D\gamma_\mu$ в розкладі по теорії збурень.

Тоді вимагаємо

$$D\gamma_\mu + \Lambda_\mu = \text{скінченна величина}, \tag{1.25}$$

звідки

$$D = -\frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}. \tag{1.26}$$

Тоді

$$\mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{3ct} = -(1+D)e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi = -Z_1 e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi, \quad Z_1 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}. \tag{1.27}$$

Остаточно, повний лагранжіан КЕД (в однопетльовому наближенні) має вигляд

$$\mathcal{L}_B = iZ_2\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi - Z_1 e\mu^{2-\frac{n}{2}}\bar{\psi}\hat{A}\psi - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{1.28}$$

— в термінах фізичних полів.

Тут

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}, \quad Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2(4-n)}, \quad A = -\frac{me^2}{2\pi^2(4-n)}. \tag{1.29}$$

Відзначимо важливу рівність $Z_1 = Z_2$, яка є справедливою у всіх порядках і є наслідком так званої тотожності Уорда-Такахаші (доведення тотожності буде дано пізніше)

$$k^\mu \Gamma_\mu(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p), \tag{1.30}$$

де за визначенням

$$\Gamma_\mu(p, p+k) \equiv -i(\gamma_\mu + \Lambda_\mu). \tag{1.31}$$

Оскільки ферміонний пропагатор зв'язаний з власною енергією електрона співвідношенням

$$G(p) = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)}, \tag{1.32}$$

то для розбіжних частин маємо в порядку e^2

$$G^{-1}_{div}(p) = (-i)\left[\hat{p}\underbrace{\left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\right)}_{=Z_2^{-1}} - m\left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2(4-n)}\right)\right], \tag{1.33}$$

$$\Gamma^\mu_{div} = -i\gamma^\mu\left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2(4-n)}\right) = -i\gamma^\mu Z_1^{-1}. \tag{1.34}$$

Тотожність Уорда-Такахаші потребує рівності $Z_1 = Z_2$ у всіх порядках теорії збурень.

Переходячи до голих величин, маємо

$$\mathcal{L}_B = i\bar{\psi}_B\hat{\partial}\psi_B - m_B\bar{\psi}_B\psi_B - e_B\bar{\psi}_B\hat{A}_B\psi_B - \frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} + \frac{1}{2\xi_B}(\partial^\mu A_{\mu B})^2. \tag{1.35}$$

Тут

$$m_B = Z_2^{-1}\underbrace{(m+A)}_{=mZ_m}, \quad e_B = e\mu^{2-\frac{n}{2}}\frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} = e\mu^{2-\frac{n}{2}}Z_3^{-1/2}, \quad \xi_B = Z_3\xi. \tag{1.36}$$

Таким чином, всі нескінченні величини включені в голі величини, при цьому лагранжіан сберіг свою початкову форму. Це і означає перенормованість КЕД в данному порядку.

2. Важливість тотожності Уорда-Такахаші

Розглянемо КЕД з двома сортами заряджених частинок, електрони і мюони. Для фотон-мюонної вершини будемо мати

$$eZ_2'^{-1}Z_3^{-1/2} = e_B(Z_1')^{-1}, \tag{2.1}$$

де Z_1' і Z_2' — перенорміровки вершини і поля мюона. Константи залежать від маси мюона (в регуляризації з обрізанням по імпульсам, або регуляризації Паулі-Вілларса). Виникає підозра, що (2.1) визначає інше співвідношення між фізичним зарядом e і голим зарядом e_B, ніж у випадку одних електронів. Але в силу тотожності Уорда-Такахаші $Z_1' = Z_2'$, це співвідношення залишається таким, як і раніше, так що залишається універсальний електричний заряд, який має одне і теж значення для всіх сортів частинок.

Теорема Боголюбова-Парасюка-Хеппа-Ціммермана (БПХЦ). Для довільної перенормованої квантової теорії поля в будь-якому порядку теорії збурень всі розбіжності ліквідуються за допомогою контрчленів, які відповідають примітивно розбіжним діаграмам. Тобто теорія є скінченою, якщо використати перенормовану теорію з повним набором контрчленів.

Теорії перенормувань можна надати сенс і поза межами теорії збурень: підібрати параметри лагранжіана як функції обрізання таким чином, щоб фізичні величини були скінченими при знятті обрізання.