1. Квантування вільного електромагнітного поля

Лагранжева густина вільного електромагнітного поля має вигляд

$$\mathcal{L}(A_\mu(x), \dot{A}_\mu(x)) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.1}$$

Система має нескінченне число ступенів вільності $A_\mu(\vec{x}, t)$, які позначаються μ і $x = (\vec{x}, t)$. Для того, щоб зв'ясувати, чи є система, що розглядається регулярною чи сингулярною, необхідно обчислити матрицу $M^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y})$:

$$M^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}_\mu(\vec{x}) \delta \dot{A}_\nu(\vec{y})}. \tag{1.2}$$

Для її обчислення нам необхідні тільки доданки в L, квадратичні по $\dot{A}_\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_0 A_i(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \ldots = \frac{1}{2}\partial_0 A_i \partial_0 A_i + \ldots. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Таким чином,

$$M^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{1.4}$$

Для цієї матриці очевидно $\det M = 0$, і ми маємо справу із сингулярною системою. Фактично це є наслідком калібрувальної інваріантності системи відносно перетворень $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. Рівняння Ейлера-Лагранжа (ЕЛ) дають

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.5}$$

Як наслідок антісиметрії тензора $F^{\mu\nu}$ маємо тотожність $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, тобто, не всі рівняння ЕЛ є незалежними.

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu(x)} = F^{\mu 0}.$$

Внаслідок $F^{00} = 0$ маємо первинну в'язь

$$\Phi_1(x) = \Pi^0(x) = 0.$$

Фактично тут є не одна в'язь, а нескінченне число їх, які позначаються неперервним індексом $\vec{x}$.

Визначимо ДП

$$\{f, g\} = \int d^3x \left(\frac{\delta f}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta g}{\delta \Pi^\mu(x)} - \frac{\delta g}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta f}{\delta \Pi^\mu(x)} \right).$$

Канонічні змінні задовольняють одночасовим співвідношенням

$$\{A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)\} = \{\Pi_\mu(\vec{x}, t), \Pi_\nu(\vec{y}, t)\} = 0,$$

$$\{A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)\} = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \qquad \Big[\{A_\mu(\vec{x}, t), \Pi_\nu(\vec{y}, t)\} = g_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{y})\Big].$$

Останнє співвідношення випливає з

$$\begin{aligned} \{A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)\} &= \int d^3z \left(\frac{\delta A_\mu(\vec{x}, t)}{\delta A_\rho(\vec{z}, t)} \frac{\delta \Pi^\nu(\vec{y}, t)}{\delta \Pi^\rho(\vec{z}, t)} - \frac{\delta \Pi^\nu(\vec{y}, t)}{\delta A_\rho(\vec{z}, t)} \frac{\delta A_\mu(\vec{x}, t)}{\delta \Pi^\rho(\vec{z}, t)} \right) \\ &= \int d^3z \, \delta_\mu^\rho \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_\rho^\nu \delta(\vec{y} - \vec{z}) = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для густини лагранжіана маємо

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\Pi_i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij},$$

де ми використали $F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \Pi_i$. Обчислимо гамільтоніан H:

$$H = \int d^3x (\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) = \int d^3x [\pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L}]. \tag{1.7}$$

Оскільки $\partial_0 A_i = \partial_i A_0 - \Pi_i$, то знаходимо

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\Pi^i(-\Pi_i + \partial_i A_0) - \frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \Pi_i \right]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Найбільш загальний гамільтоніан визначається додаванням довільної лінійної комбінації первинних в'язей $\Pi^0(x) = 0$ до H:

$$H \Rightarrow \; \bar{H} = H + \int d^3x \, u(A_\mu, \Pi^\nu(\vec{x}, t), \Pi^0(x)), \tag{1.9}$$

де u — функціонал від A_μ, Π^ν і функція від $\vec{x}, t$.

Вимога збереження в'язі під час еволюції приводить до вторичних в'язей

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, \bar{H}\} = \{\Pi^0(x), H\} + \int d^3y\, u(y)\{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\} =$$
$$= \left\{\Pi^0(x), \int d^3y \left[\frac{1}{2}\Pi_i^2(y) + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + A_0\partial_i\Pi_i\right]\right\} =$$
$$= \int d^3y \{\Pi^0(x), A_0(y)\}\partial_i\Pi_i(y) = -\partial_i\Pi_i(x) \approx 0. \tag{1.10}$$

Відповідно до загальної теорії вимагаємо

$$\Phi_2(x) = \partial_i\Pi_i(x) \approx 0. \tag{1.11}$$

Це співвідношення є вторинною в'язью. Знову додаючи довільну лінійну комбінацію цих в'язів до $barH$, отримуємо ще більш загальний гамільтоніан:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + A_0\partial_i\Pi_i + u\cdot\Pi^0(x) + v(x)\partial_i\Pi_i\right]. \tag{1.12}$$

Вимагаємо, щоб в'язь $\Phi_2(x)$ також зберігалась у часі,

$$\dot{\Phi}_2(x) = \{\partial_i\Pi_i(x), H\} \approx 0.$$

Обчислюємо

$$\{\partial_i\Pi_i(x), H\} = \int d^3y \left\{\partial_i\Pi_i(x), \frac{1}{4}F_{ij}^2(y)\right\} = \int d^3y \{\partial_k\Pi_k(x), \partial_jA_j(y)\}F_{ij}(y)$$
$$= \int d^3y\, \partial_k^x\partial_i^y\{\Pi_k(x), A_j(y)\}F_{ij}(y) = \int d^3y\, \partial_k^x\partial_i^y\delta(\vec{y}-\vec{x})F_{ij}(y)$$
$$= -\partial_i\partial_jF_{ij}(x) = 0. \tag{1.13}$$

Процес виявлення в'язей, таким чином, обривається.

Таким чином, маємо

1. Первинні і вторинні в'язи

$$\Phi_1(x) = \Pi^0(x), \quad \Phi_2(x) = \partial_i\Pi_i(x). \tag{1.14}$$

2. Φ_1 і Φ_2 є в'язями 1-го роду, легко перевірити що

$$\{\Phi_1(x), \Phi_1(y)\} = \{\Phi_1(x), \Phi_2(y)\} = \{\Phi_2(x), \Phi_2(y)\} = 0. \tag{1.15}$$

3. Найбільш загальний гамільтоніан на многовиді Γ має, таким чином, вигляд

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + u\Pi^0 + (v + A^0)\partial_i\Pi_i\right]. \tag{1.16}$$

Первинний фазовий простір був 8-ми вимірним (виключаючи залежність від $\vec{x}$) з каноничними змінними A_0, A_1, A_2, A_3 и $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$. Дві в'язи Φ_1, Φ_2 визначають 6-ти вимірний многовид в цьому фазовому просторі. Так як обидві в'язі є 1-го роду, то нам необхідні дві калібрувальні умови χ_1, χ_2. В результаті редукований фазовий простір буде 4-вимірным. Фізично це відповідає двом поперечним фотонам і їх імпульсам.

Гамільтоніан H містить довільні функції u і v (A^0 може бути поглинена в v внаслідок довільнсоті A^0). Розглянемо їх зміст.

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H\} = \int d^3y \{A_0(x), u\Pi^0(y)\} = u(x),$$

тобто функція A_0 в момент часу $t_0+\Delta t$ є повністю довільною, тобто доданок $\int d^3x\, u(x)\Pi^0(x)$ змінює A_0 не змінюючи A_i, що еквівалентно калібрувальному перетворенню $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, де $\Lambda(\vec{x}, t_0) = 0$, але $\partial_t \Lambda(\vec{x}, t) \neq 0$.

Аналогично, доданок $\int d^3x\, v(x)\partial_i \Pi_i$ дає

$$\dot{A}_i = \{A_i, H_D\} = \int d^3y \{A_i(x), \partial_j \Pi_j(y)\} v(y) = -\int d^3y\, \partial_i^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) v(y) = \partial_i v(x),$$

тобто A_i теж містить довільну функцію у розв'язку рівняння. Можна показати, що $F_{\mu\nu}$ є величиною 1-го роду, тобто не залежить від довільних функцій u і v на M.

Ми будемо використовувати наступні калібрувальні умови

$\chi_1 = A_0 \approx 0$ — часова калібровка,

$\chi_2 = \partial_i A_i \approx 0$ — кулонівська калібровка.

Обчислимо дужку Пуасона між в'язями і калібрувальними умовами

$$\{\chi_1(x), \Phi_1(y)\} = \{A_0(x), \Pi^0(y)\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{1.17}$$

$$\{\chi_2(x), \Phi_2(y)\} = \{\partial_i A_i(x), \partial_j \Pi_j(y)\} = -\partial_i^x \partial_j^y \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \Delta_x \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{1.18}$$

$$\{\chi_1(x), \Phi_2(y)\} = \{\chi_2(x), \Phi_1(y)\} = 0. \tag{1.19}$$

Таким чином,

$$\{\chi_\alpha(x), \Phi_\beta(y)\} = \begin{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \\ 0 & \Delta_x \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Калібрувальні умови χ і в'язі Φ можна розглядати разом як в'язі 2-го роду. Введемо позначення

$$\theta_s = (\chi_1, \chi_2, \Phi_1, \Phi_2), \quad s = 1, 2, 3, 4.$$

Тоді матриця ДП всіх θ_s приймає вид

$$\Delta_{ss'}(\vec{x}-\vec{y}) = \{\theta_s(x), \theta_{s'}(y)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_x\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_x\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_x \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{1.21}$$

Згідно загальної ідеології квантування систем з в'язями 2-го роду, необхідно перейти до дужки Дірака, яка автоматично виконує квантування тільки на Γ^* і усуває будь-яку довільність в гамільтоніанs. Знайдемо обернену матрицю Δ^{-1}, яка має задовольняти

$$\int d^3z\, \Delta_{st}(\vec{x},\vec{z})\Delta^{-1}_{ts'}(\vec{z},\vec{y}) = \delta_{ss'}\delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

$\Delta_{ss'}(\vec{x}-\vec{y})$ має вигляд

$$\Delta_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ -\mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_x \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Очевидно, що Δ^{-1} має вигляд

$$\left(\Delta^{-1}\right)_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D}^{-1} \\ \mathcal{D}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $\mathcal{D}^{-1}$ має вигляд

$$\mathcal{D}^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Для цього необхідно тільки мати на увазі співвідношення

$$\Delta_x\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = -\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{1.23}$$

яке є не що інше, як частинний випадок рівняння Пуасона $\Delta V = \rho$ і виражає той факт, що потенціал $\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$ відповідає заряду -1 розташованому в точці $\vec{y}$. Тоді перевіряємо що

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_x \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{z}) \begin{pmatrix} \delta(\vec{z}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{z}-\vec{y}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{1.24}$$

де ми використали

$$-\int d^3z\,(\Delta_x\delta(\vec{x}-\vec{z}))\,\tfrac{1}{4\pi|\vec{z}-\vec{y}|} = -\int d^3z\,\delta(\vec{x}-\vec{z})\Delta_z\left(\tfrac{1}{4\pi|\vec{z}-\vec{y}|}\right) \\ = \int d^3z\,\delta(\vec{x}-\vec{z})\delta(\vec{z}-\vec{y}) = \delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

Таким чином, Δ^{-1} дорівнює

$$\Delta^{-1}_{ss'}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Побудуємо тепер дужку Дірака

$$\begin{aligned} \{f,g\}_D &= \{f,g\} - \int d^3u\,d^3v\{f,\theta_s(u)\}\left(\Delta^{-1}\right)_{ss'}(\vec{u},\vec{v})\{\theta_{s'}(v),g\} \\ &= \{f,g\} - \int d^3u\,d^3v\,(\{f,x_1\},\{f,x_2\},\{f,\Phi_1\},\{f,\Phi_2\}) \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\vec{u}-\vec{v}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|} \\ \delta(\vec{u}-\vec{v}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\chi_1(v),g\} \\ \{\chi_2(v),g\} \\ \{\Phi_1(v),g\} \\ \{\Phi_2(v),g\} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \{f,g\}_D = \{f,g\} - \int d^3u\,d^3v\Big(&\{f,\chi_1(u)\},\{f,\chi_2(u)\},\{f,\Phi_1(u)\},\{f,\Phi_2(u)\}\Big) \\ &\times \begin{pmatrix} -\delta(\vec{u}-\vec{v})\{\Phi_1(v),g\} \\ \frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\Phi_2(v),g\} \\ \delta(\vec{u}-\vec{v})\{\chi_1(v),g\} \\ -\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\chi_2(v),g\} \end{pmatrix} = \{f,g\} - \int d^3u\,d^3v \\ &\times \Big(-\{f,\chi_1(u)\}\delta(\vec{u}-\vec{v})\{\Phi_1(v),g\} + \{f,\chi_2(u)\}\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\Phi_2(v),g\} \\ &+ \{f,\Phi_1(u)\}\delta(\vec{u}-\vec{v})\{\chi_1(v),g\} - \{f,\Phi_2(u)\}\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\chi_2(v),g\}\Big) \end{aligned} \tag{1.27}$$

або

$$\begin{aligned} \{f,g\}_D = \{f,g\} - \int d^3u\,d^3v\,\Big(&-\{f,A_0(u)\}\delta(\vec{u}-\vec{v})\{\pi^0(v),g\}+ \\ &+ \{f,\partial_iA_i(u)\}\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\partial_j\Pi_j(v),g\} + \{f,\Pi_0(u)\}\delta(\vec{u}-\vec{v})\{A^0(v),g\}- \\ &-\{f,\partial_i\Pi_i(u)\}\frac{1}{4\pi|\vec{u}-\vec{v}|}\{\partial_jA_j(v),g\}\Big). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Як випливає із останнього виразу, всі в'язі $A^0, \Pi^0, \partial_i A_i, \partial_i \Pi_i$ дорівнюють нулю у сильному сенсі відносно ДД. Зокрема, легко побачити, що

$$\{A_0(x), A_\mu(y)\}_D = \{A_0(x), \Pi^i(y)\}_D = 0, \tag{1.29}$$

$$\{\Pi^0(x), \Pi^\mu(y)\}_D = \{\Pi^0(x), A_i(y)\}_D = 0 \tag{1.30}$$

(це виконувалось також і для звичних ДП).

Також

$$\{A_0(x), \Pi^0(y)\}_D = \{A_0(x), \Pi^0(y)\} - \int d^3u\, d^3v \{A_0(x), \Pi^0(u)\}$$
$$\times \delta(\vec{u} - \vec{v})\{A_0(v), \Pi^0(y)\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \int d^3u\, d^3v \delta(\vec{x} - \vec{u})\delta(\vec{u} - \vec{v})\delta(\vec{v} - \vec{y}) = 0. \tag{1.31}$$

Для того щоб показати що $\partial_i A_i$ і $\partial_i \Pi_i$ також дорівнюють нулю у сильному сенсі, обчислимо

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \{A_i(x), \Pi^j(y)\} + \int d^3u\, d^3v \{A_i(x), \partial_k \Pi_k(u)\} \frac{1}{4\pi|\vec{u} - \vec{v}|}$$
$$\times \{\partial_l A_l(v), \Pi^j(y)\} = \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \int d^3u\, d^3v \partial_i^u \delta(\vec{x} - \vec{u}) \frac{1}{4\pi|\vec{u} - \vec{v}|} \partial_j^v \delta(\vec{v} - \vec{y})$$
$$= \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_i^x \partial^{jy} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i^x \partial^{jx} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}. \tag{1.32}$$

Останній вираз можна записати формально як

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \left(\delta_i^j + \frac{\partial_i^x \partial^{xj}}{\Delta_x}\right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\Delta_x}\right) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{1.33}$$

де ми ввели формальне позначення $\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = -\Delta_x^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{y})$.

Видно, що $\{\partial_i A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0$, крім того, $\{\partial_i A_i(x), A_\mu(y)\}_D = 0$ і $\{\partial_i A_i(x), \Pi^0(y)\}_D = 0$. Таким чином, комбінація $\partial_i A_i$ дорівнює нулю у сильному сенсі. Також і $\partial_i \Pi_i$ дорівнює нулю у сильному сенсі.

Той факт, що A_0 і Π^0 дорівнюють нулю, означає, що у нас немає часових фотонів, а рівність нулю $\partial_i A_i$ і $\partial_i \Pi_i$ означає відсутність повздовжних фотонів. Гамільтоніан і рівняння руху приймають вигляд

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2\right), \tag{1.34}$$

$$\dot{f} = \{f, H\}_D. \tag{1.35}$$

Можна вибрати і інші калібровки, наприклад

$$\chi_1 = A_3 = 0 \quad \text{— аксіальна калібровка,}$$

і

$$\chi_2 = \Pi_3 + \partial_3 A_0 = 0.$$

Недолік канонічного квантування — відсутність явної Лоренц-інваріантності.

Еквівалентна можливість квантування — розв'язати явно в'язі і калібрувальні умови. У випадку вільного електромагнітного поля це можна зробити у явному вигляді. Запишемо рівняння для часової, $\nu = 0$, і просторових, $\nu = i$ компонент

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \partial_i F^{i0} = 0, \\ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = 0, \end{cases} \tag{1.36}$$

або у розгорнутому вигляді для другого рівняння

$$\partial_0(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \partial_j(\partial^j A^i - \partial^i A^j).$$

В калібровці $\partial_i A_i = 0$, $A_0 = 0$ перше рівняння тотожньо задовольняється, а друге приймає вигляд $\Box A^i = 0$ (це можна отримати і безпосередньо з гамільтонова формалізма). Це рівняння має розв'язок, який задовольняє умові $\partial_i A_i = 0$:

$$A_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_i^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} + a^{(\lambda)+}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \right], \tag{1.37}$$

де $k_i \epsilon_i^{(\lambda)} = 0$ і вектори поляризації $\epsilon_i^{(\lambda)}$ нормовані таким чином

$$\epsilon_i^{(\lambda)}(\vec{k}) \epsilon_i^{(\lambda')}(\vec{k}') = \delta^{\lambda\lambda'}, \qquad \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_i^{(\lambda)}(\vec{k}) \epsilon_j^{(\lambda)}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}. \tag{1.38}$$

Гамільтоніан в термінах $a^{(\lambda)}(\vec{k})$ запишеться

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \Pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^3x \left((\partial_0 A_i)^2 + F_{ij} \partial_i A_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left((\partial_0 A_i)^2 - A_j \partial_i^2 A_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int \widetilde{d^3k}\, k^0 \left[a^{+(\lambda)} a^{(\lambda)} + a^{(\lambda)} a^{+(\lambda)} \right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

де для імпульсу використано $\Pi_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \;\Rightarrow -\partial_0 A_i$. При квантуванні ми накладаємо комутаційні співвідношення на коефіцієнти $a^{(\lambda)}(\vec{k})$:

$$\left[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{(\lambda')+}(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{1.40}$$

Обчислюючи $[A_i(x), \Pi^j(y)]$ за допомогою комутаційних співідношень для операторів $a^{(\lambda)}$, приходимо до

$$[A_i(x), \Pi^j(y)] = i \left(\delta_i^j + \frac{\partial_i^x \partial^{jx}}{\Delta_x} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Порівнюючи з (1.33), бачимо, що дужка Дірака $\{\, , \,\}_D$ при квантуванні замінюється на $[\, , \,]/i\hbar$. Відзначимо, що в кулонівській калібровці норма всіх станів додатня, однак втрачається *явна* Лоренц-інваріантність.

2. Функціональний інтеграл для поля Максвела.

Функціональний інтеграл для вільного електромагнітного поля запишеться

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \, \mathcal{D}\Pi_\mu \, \delta(A_0)\delta(\Pi_0)\delta(\partial_i A_i)\delta(\partial_i \Pi_i) \, \mathrm{Det}\,\Delta \exp i \int d^4x [\Pi^\mu A_\mu - \mathcal{H}], \tag{2.1}$$

де гамільтонова густина

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi_i^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + A_0 \partial_i \pi_i,$$

і ми використовуємо скорочене позначення $\delta(f(x)) \equiv \prod_x \delta(f(x))$. В цьому виразі, відповідно до загальної теорії, $\Delta = \{\chi_\alpha, \Phi_\beta\}$ є матрицею ДП калібрувальних умов і в'язей (дивись (1.20)). Знімая тривіальні δ-функції $\delta(A_0)$, $\delta(\Pi_0)$, маємо

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}A_i \, \mathcal{D}\Pi_i \, \delta(\partial_i A_i)\delta(\partial_i \Pi_i) \, \mathrm{Det}\,\Delta \exp i \int d^4x \left[\Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2 \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_i \, \mathcal{D}A_0 \, \mathcal{D}\Pi_i \, \delta(\partial_i A_i) \, \mathrm{Det}\,\Delta \exp i \int d^4x \left[\Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2 - A_0 \partial_i \Pi_i \right], \end{aligned} \tag{2.2}$$

де у другій рівності використано представлення для функціональної дельта-функції

$$\prod_x \delta(\partial_i \Pi_i(x)) = \int \mathcal{D}A_0 \, e^{-i \int d^4x A_0(x) \partial_i \Pi_i(x)}. \tag{2.3}$$

Після цього ми можемо проінтегрувати по імпульсним змінним $\Pi_i(x)$

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\Pi_i \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \Pi_i(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) \right] = \\ &= \exp i \int d^4x \frac{1}{2} F_{i0} F_{i0} = \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} \right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Остаточно отримуєм функціональний інтеграл в кулонівській калібровці

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \, \delta(\partial_i A_i) \, \mathrm{Det}(\Delta) \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \right], \tag{2.5}$$

де

$$\mathrm{Det}(\Delta) = \mathrm{Det}\,\|\Delta_x \delta(\vec{x}-\vec{y})\| = \mathrm{Det}\,\|\{\partial_i A_i, \partial_j \Pi_j\}\|.$$

$\mathrm{Det}(\Delta)$ не залежить від поля A_μ і може бути винесено за знак інтеграла і включено в константу нормування N. Замість калібрувальної умови $\partial_i A_i = 0$ може бути взята будь-яка функція $g(A,\Pi) = 0$, тоді

$$\mathrm{Det}\,\|\{g, \partial_i \Pi_i\}\| = \mathrm{Det}\left\| \frac{\delta g^\epsilon}{\delta \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \right\|.$$

Це є наслідком того, що в'язь $\partial_i \Pi_i$ є генератором калібрувальних перетворень

$$\delta g^\epsilon = \{g, \partial_i \Pi_i\}\delta\epsilon.$$

Цей факт дозволяє легко обчислити детермінант Фаддеєва-Попова. Наприклад, для калібровки $g(A) = \partial_i A_i$, робимо калібрувальне перетворення

$$g(A^\epsilon) = \partial_i A_i^\epsilon = \partial_i (A_i + \partial_i \epsilon),$$

і знаходимо

$$\frac{\delta g^\epsilon}{\delta \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \partial_i^2 = \Delta_x.$$

Порівняємо тепер отриманий вираз (2.5) для функціонального інтеграла в КЕД з наївним інтегралом за Фейманом

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \, \exp i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right], \tag{2.6}$$

В дії зробимо Фур'є перетворення

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right) &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} A_\mu(-k)(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) A_\nu(k). \end{aligned}$$

Цей вираз дорівнює нулю для $A_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)$ для будь-якої $\alpha(k)$, тобто, дія не змінюється вздовж калібрувальної орбіти $A_\mu(k) \quad \Rightarrow \quad A_\mu(k) + k_\mu \alpha(k)$, і наївний функціональний інтеграл (2.6) розбігається. Еквівалентно, рівняння

$$-i(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu) D_{\nu\rho}(x-y) = \delta^\mu_\rho \delta(x-y),$$

або

$$(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) D_{\nu\rho}(k) = i\delta^\mu_\rho,$$

яке повинно було би визначати фейнмановськії пропагатор $D_{\nu\rho}$, не має розв'язків, оскільки матриця $(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu)$ сингулярна. Це ускладнення — наслідок калібрувальної інваріантності, тому що ми інтегрируємо по зайвим конфігураціям, які фізично еквівалентни. Наявність в (2.5) дельта-функції, яка фіксує калібровку, тобто фіксує конкретну конкретну конфігурацію на калібрувальній орбіті, робить цей інтеграл скінченним.

3. Метод Фаддеєва-Попова.

В гамільтоновому підході ми не маємо змоги розгядати калібровки, які містять похідні по часу. Зазвичай такі калібровки порушують явну лоренцеву інваріантність. Але ми хотіли би зберігати явним чином Лоренц - інваріантність, наприклад, використати калібровку Лоренца $G(A) = \partial_\mu A^\mu$. Для цього використаємо підхід Фаддеєва-Попова, який полягає в наступному.

Нехай поля A^μ задовольняють деякий калібрувальній умові $G(A_\mu) = 0$. Визначимо так званий детермінант Фаддеєва-Попова із умови інтегрування вздовж калібрувальної орбіти для фіксованої конфігурації поля A^μ:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x)\delta(G(A^\alpha)) \det \left\| \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha(x)}\Big|_{\alpha=0} \right\|, \quad A^\alpha_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x). \tag{3.1}$$

Цей функціональний інтеграл є аналогом скінченовимірного інтеграла

$$1 = \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} da_i \right) \delta^{(n)}(\vec{g}(\vec{a})) \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j}\Big|_{a_j = a_{j0}} \right), \tag{3.2}$$

де a_{j0} задовольняють рівнянню $\vec{g}(\vec{a}_0) = 0$. Наприклад, для калібровки Лоренца $G(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu$ зробимо калібрувальне перетворення і знайдемо варіаційну похідну

$$G(A^\alpha(x)) = \partial_\mu A^\mu(x) + \Box\alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \det \left\| \frac{\delta G(A^\alpha(x))}{\delta\alpha(y)} \right\| = \det \Box_x \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.3}$$

Оскільки в даному випадку детермінант Фаддеєва-Попова не залежить від змінної інтегрування, його можна винести з під знаку інтеграла

$$\det \left\| \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha} \right\| \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \delta(G(A^\alpha)).$$

Зробимо в інтегралі по A_μ замену змінних $A^\alpha \to A$. При такій заміні міра інтегрування і дія залишаються інваріантними, $\mathcal{D}A^\alpha_\mu = \mathcal{D}A_\mu$, $S(A^\alpha) = S(A)$. Можемо розглінути і більш загальний клас калібровок

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x) = 0,$$

для яких детермінант Фаддеєва-Попова той самий: $\det \left\| \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha} \right\| = \det \Box$. Тому можемо записати

$$\int \mathcal{D}A\, e^{iS(A)} = \det \Box \int \mathcal{D}\alpha(x) \int \mathcal{D}A\, e^{iS(A)} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)). \tag{3.4}$$

Інтеграл по $\alpha(x)$ дає просто нескінченний множник, незалежний від полів. Інтеграл не залежить від $\omega(x)$, тому можна записати, опускаючи індекс α у змінної інтегрування A^α, і помножуючи чисельник і знаменник на функціональний інтеграл по $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} &N(\xi) \int \mathcal{D}\omega(x) \exp\left[-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}\right] \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\, e^{iS(A)} \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x)) \\ &= \underbrace{N(\xi) \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right)}_{N'} \int \mathcal{D}A\, e^{iS(A)} \exp\left[-i \int d^4x \int \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В останній рівності ми проінтегрували по $\omega(x)$ за допомогою відповідної дельта-функції.

Кореляційоні функції довільних операторів $\mathcal{O}(A)$ в квантовій електродинамиці таким чином задаються виразом

$$\langle 0|T\mathcal{O}(A)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp\left[i \int d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2]\right]}{\int \mathcal{D}A \exp\left[i \int d^4x [\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2]\right]}.$$

Множники N' скорочуються у цьому співвідношенні.

Корелятор $\langle 0|T\mathcal{O}(A)|0\rangle$ не залежать від калібрувального параметра ξ для калібрувально-інваріантних операторів. Із врахуванням нового доданку $\sim \frac{1}{\xi}$ для функції Гріна фотона маємо рівняння

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu\right) D^{\nu\rho}(k) = i\delta^\rho_\mu, \tag{3.6}$$

яке вже допускає розв'язок

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i(k^2 + i\epsilon)} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \tag{3.7}$$

Найбільш відомі калібровки:

$\xi = 0$ — калібровка Ландау,

$\xi = 1$ — калібровка Фейнмана,

$\xi = 3$ — калібровка Йені (зручна для задач на зв'язані стани і дослідження інфрачервоної поведінки при малих імпульсах).