1. Канонічне квантування регулярних гамільтонових систем

Класичні регулярні гамільтонові системи.

Для регулярних гамільтонових систем з n ступенями вільності і гамільтоніаном H маємо канонічні гамільтонові рівняння руху

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots n, \tag{1.1}$$

де q_i і p_i узагальнені координати і імпульси. Як відомо, ці рівняння повністю визначають еволюцію системи з часом, тому що знаючи значення координат і швидкостей в початковий момент часу, можна визначити їхні значення в будь-який наступний момент часу, розв'язуючи дану систему рівнянь. Часова еволюція функції $f(p_i, q_i)$, визначеної на фазовому просторі Γ з сукупністю координат q_i і імпульсів p_i, описується рівнянням

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.2}$$

(сумування по i мається на увазі). Визначається дужка Пуасона (ДП) $\{f, g\}$, яка асоціюється з кожною парою функцій f, g на Γ,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{1.3}$$

Тоді рявняння часової еволюції записується як

$$\dot{f} = \{f, H\}. \tag{1.4}$$

Дужка Пуасона має наступні властивості

1. Білінійність

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\},$$

$$\{f, g_1 + g_2\} = \{f_1, g_1\} + \{f_1, g_2\},$$

$$\{\alpha f, g\} = \alpha\{f, g\},$$

$$\{f, \alpha g\} = \alpha\{f, g\}.$$

2. Антисиметрічність

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

3. Тотожність Якобі

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

4. Правило Лейбніца

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

5. Існування нульового елемента c для якого

$$\{c, f\} = 0$$

для всіх функцій $f(p,q)$. В загальному випадку, якщо існує множина з операцією добутку $\{.,.\}$, то вона називається алгеброю Лі, якщо добутки задовольняють властивостям 1–3, і алгеброй Пуасона, якщо задовольняє 1–5. Множина Γ зі скобкою Пуасона називається сімплектичним многовидом. Для канонічних змінних маємо

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \text{— гамільтонові рівняння руху,}$$

і для довільної функції на фазовому просторі

$$\dot{f} = \{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}\{q_k, H\} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\{p_k, H\}.$$

Фізичні стани класичної системи — це точки (p_k, q_k) в фазовому просторі Γ, а фізичні (спостережувані) величини — функції $f(p_k, q_k)$ на Γ.

<u>Квантування класичних регулярних гамільтонових систем.</u>

Класична теорія може бути перетворена в квантову теорію за допомогою процедури квантування

1. Вводиться гільбертів простір $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $\langle .|. \rangle$.

Координати q_k, p_k заміняються на оператори $\hat{q}_k, \hat{p}_k$, які діють в $\mathcal{H}$. Комутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ грає роль скобки Пуасона.

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{1.5}$$

Комутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ задовольняє тим же самим п'яті умовам, що і дужка Пуасона.

2. Фізичні стани квантової системи — це нормовані вектори в $\mathcal{H}$.

3. Фізичні (спостережувані) величини — ермітови оператори $\hat{f}$ в $\mathcal{H}$. Величина $\hat{f}$ може бути получена з класичної $f(p,q)$ заміною імпульсів і координат на відповідні оператори, $p \to \hat{p}$, $q \to \hat{q}$, але процедура неоднозначна внаслідок некомутативності $\hat{p}$ і $\hat{q}$.

4. Часова еволюція квантового стану $|\psi;t\rangle$ визначається гамільтоніаном $\hat{H}$ (картина Шрьодінгера):

$$\hat{H}|\psi;t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi;t\rangle. \tag{1.6}$$

В картине Гейзенберга більш пряма відповідність, тому що стан ψ не залежить від часу, а еволюція операторів визначається

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t),H]. \tag{1.7}$$

Це схоже з класичними гамільтоновими рівняннями при заміні $\{\ ,\ \} \to \frac{[\ ,\ ]}{i\hbar}$.

2. Квантова механика систем з в'язями (метод Дірака-Фаддеєва)

Сингулярні лагранжіани.

Нехай система зі скінченним числом ступенів вільності описується дією

$$S = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt L(q_i,\dot{q}_i), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.1}$$

Обмежимося лагранжіанами $L(q_i,\dot{q}_i)$, які залежать від похідних не вище першого ступеня. Нехай дія є стаціонарною щодо варіацій $\delta q(t)$, які дорівнюють нулю в кінцевих точках. Тоді необхідною і достатньою умовою стаціонарності дії є рівняння Лагранжа-Ейлера:

$$L_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{2.2}$$

або, у більш розгорнутому вигляді,

$$L_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\partial \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv M_{ij}\ddot{q}_j + V_i = 0. \tag{2.3}$$

Прискорення визначаються однозначно початковими умовами на координати і швидкості, якщо матриця Гесіана M_{ij} має обернену. Це випадок регулярних систем.

Якщо $\det M = 0$, то прискорення, а значить і часова еволюція, не визначаються однозначно початковими умовами на $q, \dot{q}$. Такі системи називаються сингулярними. Гамільтонова динаміка таких систем була розвинена Діраком, Фаддеєвим і інш..

Класичні гамільтонові системи з в'язями.

Визначимо імпульси стандартним чином

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2.4}$$

Для переходу від лагранжіана до гамільтоніану потрібно перейти від швидкостей $\dot{q}$ до імпульсів p. У випадку сингулярних систем з $\det M = 0$, не всі $\dot{q}_i$ можна виразити як функції q, p. Нехай ранг матриці $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ дорівнює $(n-r)$, то по теоремі о неявних функціях можна розв'язати $(n-r)$ рівнянь (2.4) відносно $\dot{q}_l$ $(l = 1, ..., n-r)$ як функції p, q і r швидкостей, які залишаються

$$\dot{q}_l = \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, r. \tag{2.5}$$

Якщо тепер підставити (2.5) в r рівнянь, що залишаються в (2.4), то отримаємо r співвідношень на p, q, які не залежать (внаслідок ранга $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$) від $\dot{q}_\alpha$:

$$\varphi_m(p, q) = 0, \quad m = 1, \dots, r. \tag{2.6}$$

Ці співвідношення називаються первинними в'язями. Визначимо гамільтоніан стандартним чином через перетворення Лежандра,

$$H(p, q, \dot{q}) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = H(p, q). \tag{2.7}$$

Функція H не залежить явним чином від швидкостей $\dot{q}$; для несингулярних лагранжіанов це очевидно, так як $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q)$. У випадку сингулярних лагранжіанів це твердження також залишається вірним. Для доведення цього факту запишемо

$$H(p, q, \dot{q}) = p_l \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha) + p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q, \xi_l(q, p, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) \tag{2.8}$$

і візьмемо похідну по $\dot{q}_\alpha$, легко отримуємо тотожність

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_l \frac{\partial \xi_l}{\partial \dot{q}_\alpha} + p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv 0, \tag{2.9}$$

яка виконується в силу визначення імпульсів (2.4). Принцип Гамільтона

$$\delta \int L dt = 0 \tag{2.10}$$

записується тоді як

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H(p, q)) dt = 0 \tag{2.11}$$

при умові, що виконуються в'язі

$$\varphi_m(p, q) = 0. \tag{2.12}$$

В'язі можна врахувати використовуючи множники Лагранжа,

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H(p, q) - \lambda_m \varphi_m(p, q)) dt = 0 \tag{2.13}$$

(незалежні змінні p, q, λ – $(2n+r)$ змінні, λ_m - функції від t). Отримуємо гамільтонові рівняння

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}, \\ \varphi_m(p,q) = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Позначимо через Γ фазовий простір, який містить $2n$ змінних: $(q_1, \ldots, q_n), (p_1, \ldots, p_n)$. Підмножина $M \subset \Gamma$, яка визначається в'язями $\varphi_m(p,q) = 0$ має розмірність $(2n - r)$.

Визначая повний гамільтоніан $H_T = H + \lambda_m \varphi_m$, і використовуючи дужку Пуасона

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i},$$

запишемо (2.14) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\} + \lambda_m \{p_i, \varphi_m\} \approx \{p_i, H_T\}, \\ \dot{q}_i &= \{q_i, H\} + \lambda_m \{q_i, \varphi_m\} \approx \{q_i, H_T\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Формально при обчисленні ДП $\{p_i, H_T\}$ і $\{q_i, H_T\}$ в (2.15) маємо також доданки $\{p_i, \lambda_m\}\varphi_m$ і $\{q_i, \lambda_m\}\varphi_m$, відповідно. Дужки Пуасона $\{p_i, \lambda_m\}$, $\{q_i, \lambda_m\}$ нам невідомі, але ці вирази множаться на в'язі φ_m і зникають на множині M. Позначення операції $\approx$ і означає, що накладення в'язів $\varphi_m = 0$ здійснюється тільки після обчислення дужок Пуасона. Для довільної функції $g(p,q)$ у фазовому просторі еволюцію у часі можна записати як

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}.$$

Тому введений гамільтоніан H_T є генератором трансляцій у часі.

Для самоузгодженості необхідно, щоб в'язі зберігалися у часі на множині M, маємо вимагати

$$\dot{\Phi}_m \Big|_M = [\{\varphi_m, H\} + \lambda_n \{\varphi_m, \varphi_n\}] \Big|_M = 0. \tag{2.16}$$

Виключаючи ті випадки, коли (2.16) призводять до протиріч, можливо:

а)тривіальна тотожність, б) не залежать від λ, в) можуть містити деякі λ.

Випадок (б) дає нові зв'язки (вторинні)

$$\rho_k(q,p) = 0.$$

Повторюючи процедуру для ρ_k, знаходимо всі можливі нові (вторинні, третинні, і т.д.) в'язі. Переходячи потім до випадку (в), можна знайти частину множників Лагранжа λ_n (в залежності від рангу системи).

Позначимо тепер всю совокупність знайдених в'язів як

$$\psi_s(q,p) = \{\varphi_n(q,p), \rho_k(q,p)\}, \quad s = 1, \ldots, S. \tag{2.17}$$

Ці в'язі визначають якусь підмножину в $\Gamma: \ \psi_s = 0$, яку будемо позначати M.

<u>Незвідність в'язів</u>. Будь-яке функці. $f(q,p)$, яка обертається в нуль на M, можна представити як лінійну комбінацію в'язів

$$f(q,p) = \sum a_s(q,p)\psi_s(q,p). \tag{2.18}$$

Зокрема, H_T можна записати в загальному випадку як

$$H_T = H_T\Big|_M + v_s(q,p)\psi_s(q,p), \tag{2.19}$$

де v_s — довільні функції p і q.

<u>Визначення</u>. Функція $f \in C(\Gamma)$ називається приналежній до першого роду, якщо $\{f, \psi_s\} \approx 0$ для всіх ψ_s. Якщо це не виконується, то функція f — величина другого роду.

Рівність $\{f, \psi_s\} \approx 0$ означає, що $\{f, \psi_s\} = \sum_{s'} c_{ss}\psi_{s'}$.

<u>Теорема</u>. Дужка Пуасона двух величин 1-го рода також є величиною 1-го рода. Дійсно, для них

$$\{R, \varphi_i\} = r_{ij}\varphi_j, \qquad \{S, \varphi_i\} = s_{ij}\varphi_j.$$

Використовуючи тотожність Якобі, доводимо

$$\begin{aligned}\{\{R,S\},\varphi_i\} &= -\{\{S,\varphi_i\},R\} - \{\{\varphi_i,R\},S\} = \\ &= \{r_{ij}\varphi_j, S\} - \{s_{ij}\varphi_j, R\} = s_{ij}r_{jk}\varphi_k - r_{ij}s_{jk}\varphi_k \approx 0.\end{aligned}$$

<u>Визначення</u>. В'язи першого рода Φ^a задовольняють

$$\{\Phi^a, \psi_s\} \approx 0, \tag{2.20}$$

або внаслідок незвідности,

$$\{\Phi^a, \varphi_s\} = c^a_{ss'}\psi_{s'}, \qquad a = 1, \ldots, m < S. \tag{2.21}$$

Нехай ми знайшли всі в'язі першого роду, Φ^a, тоді в'язі що залишились, θ^α, будуть в'язями другого рода, для них

$$\det \|\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}\| \neq 0. \tag{2.22}$$

Дійсно, якщо $\det \|\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}\| \approx 0$, то існує нетривіальний набір функцій $a_\alpha(q,p)$, таких що

$$a_\alpha\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} \approx 0, \tag{2.23}$$

що можна переписати у вигляді

$$\{a_\alpha\theta_\alpha, \theta_\beta\} \approx 0. \tag{2.24}$$

Так як для в'язей першого рода очевидно справедливо, що

$$\{a_\alpha\theta_\alpha, \Phi_a\} \approx 0, \tag{2.25}$$

то приходимо до висновку, що $a_\alpha\theta_\alpha$ - в'язь першого рода, що протиричить припущенню, що всі в'язі першого рода вичерпуються Φ^a.

Наслідок 1. Число в'язів 2-го рода — парне, так як матрица $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$ — антисиметрична.

Наслідок 2. Ті функції $v(q,p)$ у виразі (2.19), які помножують в'язи другого рода, визначени на M. Дійсно, відповідні функції знаходяться з системи лінійних рівнянь

$$\dot{\theta}_\alpha\big|_M = \left[\left\{\theta_\alpha, H_T\big|_M\right\} + v_\beta\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}\right]\big|_M = 0. \tag{2.26}$$

В силу умови самоузгодженості ми можемо розв'язати v_β на M в силу існування матриці, оберненої до $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}$. Таким чином, невизначені функції $v(q,p)$ залишаються в H_T тільки при в'язях 1-го роду. Відзначимо, що функції $v(q,p)$ однозначно визначені тільки на підмножині M, на повному фазовому просторі Γ вони залишаются довільними.

В наслідок того, що невизначені функції, які відповідають в'язям дркгого рода можуть бути визначені, то можна очікувати, що із в'язями другого рода мати справу простіше, ніж із в'язями першого рода. Фактично від них можна позбавитись вводячи нову дужку Пуасона, а саме дужку Дірака $\{\ ,\ \}_D$.

Дужка Дірака.

Розглянемо фазовий простір з дужкою Пуасона $\{\ ,\ \}$. Нехай є в'язі першого роду $\Phi_i = 0$ і в'язу другого роду θ_α. Визначимо матрицю

$$\Delta_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}. \tag{2.27}$$

Дужка Дирака визначається виразом

$$\boxed{\{f,g\}_D = \{f,g\} - \{f,\theta_\alpha\}\Delta^{-1}_{\alpha\beta}\{\theta_\beta, g\}.} \tag{2.28}$$

Неважко перевірити, що дужка Дірака задовольняє всім п'яти властивостям ДП. Причина, чому вводять дужку Дірака, є в тому, що по відношенню до неї в'язі другого роду дорівнюють нулю у *сильному сенсі*.

<u>Визначення.</u> Функція $f(q,p)$ називається рівною нулю в сильному сенсі, якщо $f \approx 0$, і, крім того, її ДП $\{f,g\} \approx 0$ для всіх функцій $g \in C(\Gamma)$.

З означення дужки Дірака (2.28) випливає, що крім того, що $\theta_\alpha \approx 0$, також її дужка Дірака $\{f,\theta_\alpha\}_D \approx 0$ для будь-якої $f \in C(\Gamma)$ і всіх α. Важливим наслідком цього є той факт, що доданки $v_\alpha \theta_\alpha$ в гамільтоніані можуть бути не враховані, тому що вони не впливають на часову еволюцію системи. Часова еволюція також задається за допомогою дужки Дірака, дійсно, вона співпадає зі стандартним визначенням еволюції,

$$\{g,H\}_D = \{g,H\} - \{g,\theta_s\}\Delta^{-1}_{ss'}\{\theta_{s'},H\} \approx \{g,H\} = \dot{g}, \tag{2.29}$$

так як $\{\theta_s,H\} \approx 0$ $(\dot{\theta}_s = \{\theta_s,H\} \approx 0)$.

Очевидно, що рівняння руху

$$\dot{g} = \{g,H\}_D \tag{2.30}$$

означає, що θ_s автоматично виключаються з H. Все це означає, що θ_s можна вважати рівними нулю в сильному сенсі при використанні дужки Дірака.

Для того щоб зрозуміти смисл нових дужок Пуасона, розглянемо випадок, коли набор θ_s складається з $\theta_1 = q_1,\ \theta_2 = p_1$. Тоді

$$\Delta_{ss'} = \begin{vmatrix} 0 & \{q_1,p_1\} \\ \{p_1,q_1\} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta^{-1}_{ss'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Розпишемо доданок

$$\{g,\theta_s\}\Delta^{-1}_{ss'}\{\theta_{s'},f\} = (\{g,\theta_1\},\{g,\theta_2\}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\theta_1,f\} \\ \{\theta_2,f\} \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{\partial g}{\partial p_1},\ \frac{\partial g}{\partial q_1}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ -\frac{\partial f}{\partial q_1} \end{pmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial g}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Бачимо, що дужка Дірака $\{f,g\}_D$ отримується зі старої дужки Пуасона викресленням з суми по n доданків, які містять похідні по q_1, p_1. Таким чином, нова дужка Пуасона відноситься до системи зі ступенями вільності без q_1, p_1. У загальному випадку в'язів 2-го рода θ_s $(s = 1,\ldots,2S)$ має місце редукція до $2(N-S)$ ступенів вільності, хоча редукція числа ступенів вільності більш складна і не зводиться до простого викреслювання деяких p і q. Зручність роботи з дужкою Дірака у том, що вона автоматично враховує в'язі другого роду, не розв'язуючи їх в явному вигляді.

Гамільтонові системи з в'язями першого роду.

У подальшому розглянемо гамільтонову систему із в'язями тільки першого рода, які задовольняють

$$\{\Phi^a, \Phi^b\} = C_c^{ab}\Phi_c, \qquad \{H, \Phi^b\} = d_b^a \Phi^b. \tag{2.32}$$

C_c^{ab} и d_b^a в загальному випадку є функціями p, q. Коли $C_c^{ab} = const$, то в'язі задовольняють алгебрі Лі (наприклад, в калібрувальних теоріях, але не в гравітації).

Таким чином, для дії маємо

$$S(p, q, u) = \int (p_i \dot{q}_i - H - u^a \Phi^a) dt. \tag{2.33}$$

У випадку присутності в'язів другого роду будемо вважати, що всі вони включені в H і використовувати дужку Дірака замість ДП.

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H + u^a \Phi^a\} \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^a \frac{\partial \Phi^a}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H + u^a \Phi^a\} \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} + u^a \frac{\partial \Phi^a}{\partial q_i}, \\ \Phi^a(p, q) &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Внаслідок (2.32) траєкторії, що задовольняють $\Phi^a = 0$ будуть залишатись на многовиді M. Однак, як випливає з (2.34), розв'язки рівнянь руху будуть містити довільні функції u^a. Розглянемо більш уважно цю ситуацию. Нехай на Γ є два гамільтоніана $H_1 = H + u^a \Phi^a$ и $H_2 = H + v^a \Phi^a$. Вони співпадають на M і обидва застосовні для опису системи. Якщо ми починаємо з деякої точки Z на M і прослідкуємо за часовою еволюцією згідно H_1 на часовому інтервалі Δt, тоді приходимо до точки Z_1. Якщо ж еволюція відбувається за допомогою H_2, тоді приходимо до точки Z_2. Так як гамільтоніани рівні на M, то точки Z_1 і Z_2 представляють один і той же фізичний стан. Варіюючи одну функцію u^c і зберігаючи інші функції фіксованими, отримуємо одновимірний набір еквівалентних точок. Для заданої точки Z множина усіх точок на M, які описують один і той же фізичний стан, що і Z, називається *калібрувальною орбітою*. Розмірність калібрувальної орбіти дорівнює числу в'язей першого роду.

Для даної калібрувальної орбіти ми можемо перейти від однієї точки до іншої варіюючи функції u^a, тобто виконуючи калібрувальне перетворення. Його загальна форма $\delta Z = Z_2 - Z_1$. Запишемо його в термінах в'язей, викостовуючи рівняння руху $\dot{Z}_A = \{Z_A, H_T\}$,

$$\left.\begin{aligned} Z_{A1} - Z_A = \left(\frac{dZ_A}{dt}\right)_{H_1}\Delta t = \{Z_A, H + u^a\Phi^a\}\Delta t \\ Z_{A2} - Z_A = \left(\frac{dZ_A}{dt}\right)_{H_2}\Delta t = \{Z_A, H + v^a\Phi^a\}\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

$$\Rightarrow \quad \delta Z_A = \{Z_A, H + (v^a - u^a)\Phi^a\}\Delta t. \tag{2.36}$$

Внаслідок довільності функцій v^a і u^a і інфенітезімальності Δt найбільш загальна форма калібрувального перетворення буде $\delta Z_A = \{Z_A, \epsilon^a\varphi^a\}$, де ϵ^a — довільні інфінітезімальні функції. Так як калібрувальні перетворення визначені тільки для точок на M, останне можна записати як

$$\delta Z_A = \epsilon^a\{Z_A, \Phi^a\}.$$

Варіація довільної функції на фазовому просторі

$$\delta\chi(Z) = \frac{\partial\chi(Z)}{\partial\epsilon^a}\epsilon^a = \{\chi, \Phi^a\}\epsilon^a = \frac{\partial\chi(Z)}{\partial Z_A}\{Z_A, \Phi^a\}\epsilon^a.$$

Оскільки фізичні стани представляються калібрувальними орбітами, то фізичними спостережуваними є тільки функції p, q, які не залежать від u^a, тобто є постійними на калібрувальній орбіті.

Розглянемо дві сусідні точки на M, Z і $Z + \delta Z$, які пов'язані калібрувальними перетвореннями $\delta Z_A = \epsilon^a\{Z_A, \Phi^a\}$. Фізична спостережувана f повинна задовольняти

$$f(Z) = f(Z + \delta Z), \tag{2.37}$$

звідки

$$\frac{\partial f}{\partial Z_A}\delta Z_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^a\frac{\partial f}{\partial Z_A}\{Z_A, \Phi^a\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^a\{f, \Phi^a\} = 0. \tag{2.38}$$

Необхідною і достатньою умовою того, що f представляє фізичну спостережувану, очевидно є умова

$$\{f, \Phi^a\} \approx 0 \tag{2.39}$$

для всіх a, тобто функція f повинна бути функцією 1-го роду.

В термінах повного фазового простору Г

$$\dot{f} = \{f, H\} + u^a\{f, \Phi^a\}, \tag{2.40}$$

і для спостережуваних (калібрувально-інваріантних) величин повинно виконуватись

$$\{f, \Phi^a\} = h^a_b \Phi^b. \tag{2.41}$$

В цьому випадку залежність від довільних u^a пропадає на M. Згідно (2.32) гамільтоніан H є величиною 1-го роду, тобто спостерігаємою величиною.

В калібрувальній орбіті всі точки представляють один і той же фізичний стан. Зайве мати так багаго точок у фазовому просторі, які відповідають одному фізичному стану, тому виберемо одну точку (одного представника) в кожній калібрувальній орбіті. Цей процес називається фіксацією калібровки. Зазвичай це забезпечується за допомогою накладення додаткової (калібрувальної) умови $\chi^a(p, q) = 0$. Множина точок в M, які задовольняють цю рівність, називається редукованим фазовим простором. Число калібрувальних умов дорівнює числу в'язей 1-го роду.

Иноді буває непросто (а в деяких випадках і неможливо) вибрати калібрувальні умови так, щоб вони відбирали в точності по одному представнику з калібрувальної орбіти (проблема Грібова). Часто це можна зробити тільки локально, але не глобально.

Таким чином, для того щоб отримати редукований фазовий простір Γ^* з початкового фазового простору Г, необхідно накласти обмеження $\Phi^a = 0$ і $\chi^a = 0$. Тому калібрувальні умови $\chi^a = 0$ можна розглядати як нові в'язі. Очевидно, що розмірність Γ^* є $2n - 2m$ $(a = 1, \ldots, m)$.

Для калібрувальних умов χ_a предположимо справедливість

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0, \tag{2.42}$$

$$\det \|\{\Phi_a, \chi_b\}\| \neq 0. \tag{2.43}$$

Якщо справедливо (2.42), тоді виконуючи канонічні перетворення на Г, перейдемо до нових змінних

$$\chi_a(p, q) = p_a, \quad a = 1, \ldots, m,$$

тобто нові імпульси тепер $p = (\chi_a, p^*)$. Нехай q_a — спряжені до p_a координати, $q = (q_a, q^*)$, q^*, p^* — інші канонічні змінні. Умова (2.43) в ціх змінних приймає вид

$$\det \left\| \frac{\partial \Phi^a}{\partial q^b} \right\| \neq 0. \tag{2.44}$$

З (2.44) випливає, що рівняння $\Phi^a = 0$ можна розв'язати відносно координат q_b. В результаті підпростір Γ^* задається рівняннями

$$\chi_a \equiv p_a = 0, \quad q_a = q_a(q^*, p^*), \tag{2.45}$$

де q^*, p^* — незалежні канонічні координати на Γ^*. Гамільтоніаном системи на Γ^*, очевидно, є редукована функція

$$H^*(q^*, p^*) = H(q,p)|_{\Phi=0,\chi=0} = H(q_i^*, p_i^*, q_a(q_i^*, p_i^*)). \tag{2.46}$$

Покажемо еквівалентність систем гамільтонових рівнянь на просторі Γ і підпросторі Γ^*. На Γ ми мали рівняння

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^a \frac{\partial \Phi^a}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u^a \frac{\partial \Phi^a}{\partial q_i}, \quad \Phi_a(p,q) = 0 \tag{2.47}$$

Розв'язок цих рівнянь, як ми знаемо, містить довільні функції $u^a(t)$. Додаткові умови $\chi_a(p,q) = 0$ знищують цю довільність, виражая u^a через канонічні змінні. В результаті в якості рівнянь руху залишаються тільки рівняння для змінних q^*, p^*, які співпадають з гамільтоновими рівннями для системи Γ^*

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*} \tag{2.48}$$

Дійсно, розгнянемо рівняння (2.47) в координатах (2.45). Рівняння $\dot{p}_a = 0$ приводять до співвідношень, які дозволяють знайти u^a

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} + u^b \frac{\partial \Phi^b}{\partial q_a} = 0. \tag{2.49}$$

Розглянемо тепер деякий з імпульсів p^* і порівняємо рівняння для нього, які випливають із (2.47), (2.46) та з (2.48). Маємо

$$(2.47) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial q^*} - u^b \frac{\partial \Phi^b}{\partial q^*},$$
$$(2.48) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*} = -\frac{\partial H}{\partial q^*} - \frac{\partial H}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial q^*},$$

де у другому рівнянні ми використали означення редукованого гамільтоніану (2.46). Праві частини двох цих рівнянь співпадають, якщо

$$u^a \frac{\partial \Phi^a}{\partial q^*} = \frac{\partial H}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial q^*}. \tag{2.50}$$

Із (2.49) це еквівалентно

$$u^a\left(\frac{\partial\Phi^a}{\partial q^*}+\frac{\partial\Phi^a}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial q^*}\right)=0. \tag{2.51}$$

Остання рівність виконується тотожньо в силу умови в'язі

$$\Phi_a(q,p)=\Phi^a(q_a(q^*,p^*),0,q^*,p^*)\equiv 0, \tag{2.52}$$

похідна від якої теж тотожньо дорівнює нулю. Відзначимо, що для однозначного знаходження u^a з (2.49) важливо, що

$$\det\left\|\frac{\partial\Phi_b}{\partial q_a}\right\|\neq 0.$$

Аналогічно можна довести і тотожність на Γ^* рівнянь для q^*.

Відзначимо, що зміна вибору калібрувальних умов зводиться до *канонічного* (!) перетворення у просторі Γ^* і тому не впливає на фізику задачі.

Покажемо тепер, що *стандартна* дужка Пуасона на Γ зводиться до дужки Пуасона на Γ^* для незалежних канонічних змінних q^*,p^*:

$$\{f,g\}\Big|_{\Gamma^*}=\sum_i\left(\frac{\partial f^*}{\partial q_i^*}\frac{\partial g^*}{\partial p_i^*}-\frac{\partial f^*}{\partial p_i^*}\frac{\partial g^*}{\partial q_i^*}\right), \tag{2.53}$$

де редуковані функції

$$f^*=f(q_a(q^*,p^*),q^*,0,p^*),$$

$$g^*=g(q_a(q^*,p^*),q^*,0,p^*).$$

Для перевірки (2.53) обчислимо дужку Пуасона $\{f,g\}$ в неканонічних координатах $\eta=(\Phi_a,q^*,p_a,p^*)$. Тоді

$$\{f,g\}=\sum_{\alpha,\beta}\{\eta_\alpha,\eta_\beta\}\frac{\partial f}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial g}{\partial\eta_\beta}. \tag{2.54}$$

Внаслідок умов (2.32) і (2.42) ряд доданків в правій частині (2.54) щезає, і в результаті вона співпадає з правою частиною (2.53), де

$$f^*=f(\eta)\Big|_{p_a=\Phi_a=0},\quad g^*=g(\eta)\Big|_{p_a=\Phi_a=0}.\qquad \text{Довести!}$$

Таким чином, ми маємо тепер класичний опис систем із в'язями, які мають наступні властивості.

1. Задан фазовий простір Γ із дужкою Пуасона $\{\cdot\,,\cdot\}$. Координати $Z_A=(q_i,p_i)$ цього простору задовольняють

$$\{Z_A,Z_B\}=C_{AB}(Z),\qquad C_{AB}=-C_{BA},\qquad \det C\neq 0.$$

2. Система має деяке число в'язей 1-го роду $\Phi_a = 0$. При накладанні в'язей фазовий простір Γ редукуються до M. Всі в'язі є в'язями 1-го роду

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = C_{abc}\Phi_c.$$

Кожен фізичний стан представляється m-вимірним підмноговідом в M, де m —число в'язей 1-го роду. Такий підмноговид називається калібрувальною орбітою. На калібрувальній орбіті можна переходити від однієї точки до іншої за допомогою *калібрувального перетворення*, яке має наступний вигляд

$$\delta Z_A = \epsilon_a \{Z_A, \Phi_a\}.$$

Накладаючи калібрувальні умови, можна вибрати на кожній калібрувальній орбіті одну точку в якості представника фізичного стану.

3. Спостережувані величини є функціями 1-го роду на $C(M)$. Ці функції інваріантні при калібрувальних перетвореннях

$$\delta f = \epsilon_a \{f, \Phi_a\} \approx 0.$$

.

4. Часова еволюція функцій 1-го роду (які представляють спостережувані) визначається рівнянням

$$\dot{f} = \{f, H\},$$

де H — гамільтоніан, функція 1-го роду.

<u>Операторне квантування гамільтонових систем з в'язями.</u>

Після квантування квантово-механічна система має наступні властивості

1. Є гільбертів простір $\mathcal{H}$ із внутрішним добутком $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$. Координати Z_A представляються ермітовими операторами $\hat{Z}_A$, які задоволняють комутаційні співвідношення $[\hat{Z}_A, \hat{Z}_B] = i\hbar C_{AB}(\hat{Z})$.

2. Фізичні стани представляються векторами $|\psi\rangle$ в $\mathcal{H}$, які задовольняють умовам

$$\boxed{\hat{\Phi}_a(\hat{Z})|\psi\rangle = 0,}$$

де $\Phi_a(Z)$ — в'язі першого роду. Зауважимо, що в'язі другого роду не можна накладати на вектори у гільбертовому просторі аналогічно в'язям першого роду, це призводить до протиріччя. В'язі другого роду враховуються комутатор на новий модіфікований комутатор, відповідаючий дужці Дірака.

3. Спостережувані представляються ермітовими операторами.

4. Гамільтоніан $\hat{H}$ випливає з гамільтонової функції H заміною координат Z_A на оператори $\hat{Z}_A$. Часова еволюція фізичних станів визначається (в картині Шредінгера)

$$\hat{H}|\psi, t\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi, t\rangle.$$

В картині Гейзенберга оператори залежать від часу

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, H].$$

Інтеграл по траєкторіям для систем з в'язями.

Для квантування системи у фазовому просторі Γ^* можна використовувати незалежні змінні q^*, p^*, де амплітуда переходу вакуум-вакуум записується відомим чином

$$\langle 0|0\rangle = \int \prod_{j=1}^{2(n-m)} \mathcal{D}q_j^* \mathcal{D}p_j^* \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} (p_i^* \dot{q}_i^* - H^*(p^*, q^*))dt \right]. \tag{2.55}$$

Покажемо, що амплітуда переходу вакуум-вакуум у повному фазовому просторі Γ з координатами q, p має вигляд

$$\boxed{\langle 0|0\rangle = \int \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} (p_i \dot{q}_i - H(p, q))dt \right\} \prod_a \delta(\chi_a)\delta(\Phi_a) \det|\{\chi_a, \Phi_b\}|,} \tag{2.56}$$

або

$$\langle 0|0\rangle = \int \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i \prod_a \mathcal{D}\lambda_a \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} (p_i \dot{q}_i - \underbrace{H(p, q) - \lambda_a \Phi_a(p, q)}_{H_T})dt \right]$$
$$\times \prod_a \delta(\chi_a) \det|\{\chi_a, \Phi_b\}|.$$

Для того, щоб довести еквівалентність двух формул, виконаємо канонічне перетворення до змінних $p_a = \chi_a, q_a, p^*, q^*$ в (2.56). Міра $\prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}p_i$ не змінюється оскільки є інваріантною за теоремою Ліувіля. Множник

$$\prod_a \delta(\chi_a)\delta(\Phi_a) \det|\{\chi_a, \Phi_b\}|$$

переписується у вигляді

$$\prod_a \delta(p_a)\delta(q_a - q_a(q^*, p^*)),$$

і після інтегрування по (p_a, q_a) в (2.56) за допомогою дельта функцій зводиться до (2.55), що і треба було довести.

3. Приклади простих фізичних систем з в'язями.

Вільна релятивістська частинка

Найпростіша система, яка призводить до гамільтоновій системи з в'язями — це вільна релятивістська частинка. Дія пропорційна довжині світової лінії

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu^2}, \qquad \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \tag{3.1}$$

де τ — параметр власного часу.

Дія інваріантна відносно локальних перетворень τ (диферomорфізм): $\tau = f(\tau')$, де f — довільна діференцируєма функція ($\tau_1 = f(\tau_1')$, $\tau_2 = f(\tau_2')$). Зокрема, якщо вибрати калібровку $\tau = x_0$, тоді

$$S = -m \int_{x_{01}}^{x_{02}} dx_0 \sqrt{1 - \vec{v}^2}. \tag{3.2}$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа дають

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu}\ddot{x}_\nu. \tag{3.3}$$

Матриця других похідних по швидкостях

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\nu}\left(-m\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) = -\frac{m}{\sqrt{\dot{x}^2}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\dot{x}^2}\right). \tag{3.4}$$

Неважко переконатись, що $\dot{x}_\nu$ є власним вектором цієї матриці,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu}\dot{x}_\nu = 0, \tag{3.5}$$

з власним значенням нуль. Таким чином гесіан

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu} = 0. \tag{3.6}$$

Інших власних векторів з нульовими власними значеннями немає, і ранг матриці $\partial^2 L/\partial\dot{x}_\mu\partial\dot{x}_\nu$ дорівнює 3. Таким чином, тільки 3 із 4-х рівнянь Ейлера-Лагранжа лінейно незалежні. При переході до гамільтонової системи виникає одна в'язь. Дійсно, знаходимо імпульс

$$p^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = -m\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \tag{3.7}$$

і переконуємося, що

$$p_\mu p^\mu = m^2. \tag{3.8}$$

Гамільтоніан тотожньо дорівнює нулю:

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L = \dot{x}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - L = 0. \tag{3.9}$$

Це, очевидно, є наслідок однорідності лагранжіана L по $\dot{x}_\mu$. Гамільтоніаном буде $H_T = u(p_\mu p^\mu - m^2)$, тобто лінейна комбінація в'язей (яка, очевидно, в цьому випадку є в'язью першого роду).

Гамільтонові рівняння руху

$$\dot{g} = \{g, H_T\}.$$

Дужки Пуасона

$$\{x_\mu, p^\nu\} = \delta^\nu_\mu, \qquad \{x_\mu, x_\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0,$$

і канонічні рівняння Гамільтона

$$\dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = \{p_\mu, u(p^2 - m^2)\} = 0,$$

$$\dot{x}_\mu = 2up_\mu.$$

Фізичними спостережуваними будуть функції $f(x_\mu, p_\mu)$, які задовольняють

$$\{f, p^2 - m^2\}|_{p^2=m^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_\mu}\{x_\mu, p^2 - m^2\} + \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\underbrace{\{p_\mu, p^2 - m^2\}}_{=0} = 2p_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} = v(p^2 - m^2).$$

При квантуванні по Діраку в'язь 1-го роду накладається на стани в гільбертовому просторі

$$(p^2 - m^2)|\psi\rangle = 0.$$

Зокрема, в координатному представленні, де $p_\mu = -i\partial_\mu$, фізичні стани задовольняють рівнянню Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)|\psi\rangle = 0.$$

<u>Вільна релятивістська струна.</u>

Дія релятивістської струни (дія Намбу-Гото) записується у вигляді

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_0^\pi d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad {x'}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\sigma}, \tag{3.10}$$

де α' – параметр, який має розмірність зворотний до квадрату маси (в системі одиниць $\hbar = c = 1$), σ – просторова координата вздовж струни, τ – параметр власного часу. Дія має чисто геометричний сенс: вона пропорційна площі яку замітає струна при еволюції в просторі-часі.

Показати, що гесіан $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu}$ має ранг 2, ті знайти дві первинні в'язі

$$\Phi_1 = \mathcal{P}_\mu x'^\mu = 0, \quad \Phi_2 = \mathcal{P}^2 + \frac{(x')^2}{(2\pi\alpha')^2} = 0, \tag{3.11}$$

де

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = -\frac{(\dot{x}x'){x'}_\mu - \dot{x}_\mu x'^2}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}} \cdot \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \tag{3.12}$$

Очевидно, $\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = 0$, і в якості густині гамільтоніана ми повинні взяти $\mathcal{H} = \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2$.

Показати, що вторинних в'язей немає і обчислити

$$\{\Phi_1, \Phi_2\},$$

використовуючи одночасові дужки Пуасона

$$\{x_\mu(\tau,\sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau,\sigma')\} = \delta_\mu^\nu \delta(\sigma - \sigma'). \tag{3.13}$$

Дужка Пуасона двох функціоналів f і g від координат $x(\tau,\sigma)$ і імпульсів $\mathcal{P}(\tau,\sigma)$ визначається наступним чином

$$\{f, g\} = \int d\sigma' \left\{ \frac{\delta f(x(\tau,\sigma), \mathcal{P}(\tau,\sigma))}{\partial x_\mu(\tau,\sigma')} \frac{\delta g(x(\tau,\sigma), \mathcal{P}(\tau,\sigma))}{\delta \mathcal{P}^\mu(\tau,\sigma')} - \right.$$
$$\left. - \frac{\delta f(x(\tau,\sigma), \mathcal{P}(\tau,\sigma))}{\delta \mathcal{P}^\mu(\tau,\sigma')} \frac{\delta g(x(\tau,\sigma), \mathcal{P}(\tau,\sigma))}{\partial x_\mu(\tau,\sigma')} \right\}.$$