1. Інтегральні рівняння Швінгера-Дайсона

Розглянемо діаграми для власної енергії електрона, які можна розбити на два класи: одночастинковонезвідні діаграми (або компактні) і звідні діаграми з'єднані однією ферміонною лінією.

Позначимо $-i\Sigma(p)$ суму всіх компактних діаграм (масовий оператор). Тоді нескінчений ряд всіх діаграм можна представити у вигляді блоків $-i\Sigma(p)$ з'єднаних однією ферміонною лінією

$$\begin{aligned}
G(p) &= S(p) + S(p)(-i\Sigma)S(p) + S(-i\Sigma)S(-i\Sigma)S + \ldots \\
&= S(p)\left[1 + (-i\Sigma)S + (-i\Sigma)S(-i\Sigma)S + \ldots\right] \\
&= S\frac{1}{1-(-i\Sigma)S} = \frac{i}{\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

де $S(p) = i/(\hat{p} - m_0)$ і $G(p)$ є вільний і точний електронні пропагатори, відповідно.

Аналогічно для фотона, де діаграми також можна розбити на компактні (або сильнозв'язані) власноенергетичні діаграми $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ для фотона, і некомпактні діаграми, де блоки $-i\Pi_{\mu\nu}(k)$ з'єднані однією фотонною лінією. Увесь нескінчений ряд діаграм для фотонного пропагатора запишеться

$$D_{\mu\nu} = D^0_{\mu\nu} + D^0_{\mu\lambda}(-i\Pi^{\lambda\rho})D^0_{\rho\nu} + D^0_{\mu\lambda}(-i\Pi^{\lambda\rho})D^0_{\rho\sigma}(-i\Pi^{\sigma\delta})D^0_{\delta\nu} + \ldots, \tag{1.2}$$

і отримуємо рявняння

$$D_{\mu\nu} = D^0_{\mu\nu} + D^0_{\mu\lambda}(-i\Pi^{\lambda\rho})D_{\rho\nu}, \tag{1.3}$$

де вільний пропагатор має тензорну структуру

$$D^0_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}, \tag{1.4}$$

а власна енергія фотона є поперечним тензором

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2). \tag{1.5}$$

Тензорну структуру повного фотонного пропагатора можна записати з двома невідомими скілярними функціями $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + d_l(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \tag{1.6}$$

Підставляючи це у рівняння (1.3), маємо рівняння

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2}P_{\mu\nu} + d_l\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} = \frac{1}{ik^2}P_{\mu\nu} + \xi\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4} + \frac{1}{ik^2}(-i)\Pi(k^2)\cdot k^2\cdot\frac{d(k^2)}{k^2}\cdot P_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

де тензор

$$P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \tag{1.8}$$

і ми скористалися властивістю поперечности цього тензора $k^\mu P_{\mu\nu}(k) = 0$. Прирівнюючи вирази при незалежних ортогональних тензорах $P_{\mu\nu}(k)$ і $k_\mu k_\nu$, знаходимо, що $d_l(k^2) = \xi$, а $d(k^2)$ визначається з простого рівняння

$$d(k^2) = 1 - \Pi(k^2)\cdot d(k^2) \quad \Rightarrow \quad d(k^2) = \frac{1}{1+\Pi(k^2)}. \tag{1.9}$$

Як бачимо, повздовжна частина пропагатора (1.6) не міняється внаслідок поперечності тензора $\Pi_{\mu\nu}(k)$.

Суму всіх вершинних частин позначимо $\Gamma_\mu(p', p)$ (у визначення не включаємо пропагатори зовнішніх електронних і фотонних ліній, а також множник $(-ie_0)$).

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p).$$

Визначено також ядро електрон-позітронного розсіяння $K(p, p', q)_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. У визначення K не включені діаграми, які можна розбити на дві, розрізаючи одну фотонну лінію, або дві ферміонні лінії.

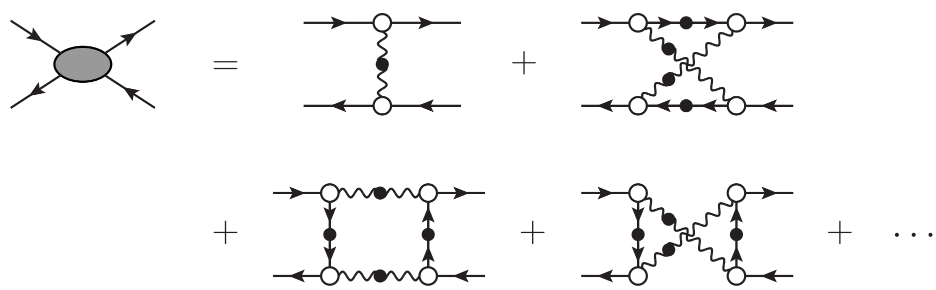

Рис. 1. Представлення електрон-позітронного ядра у вигляді скелетних діаграм з повними пропагаторами і вершинамию

Випишемо інтегральні рівняння, які зв'язують величини Σ, $\Pi_{\mu\nu}$, з повними пропагаторами $G(p)$, $D_{\mu\nu}$, і вершиною Γ_μ.

$$-i\Sigma(p) = (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k). \tag{1.10}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} G^{-1}(p) &= \frac{\hat{p} - m_0 - \Sigma(p)}{i} = S^{-1}(p) + i\Sigma(p) \quad \Rightarrow \\ i\Sigma(p) &= G^{-1}(p) - S^{-1}(p). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Отримуємо інтегральне рівняння для ферміонного пропагатора

$$\boxed{G^{-1}(p) = S^{-1}(p) - (-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(p, p-k) G(p-k) \gamma_\nu D^{\mu\nu}(k).} \tag{1.12}$$

Аналогічно, для вакуумної поляризаціхї

$$-i\Pi_{\mu\nu}(k) = (-ie_0)^2(-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \,\mathrm{tr}[\gamma_\mu G(p-k) \Gamma_\nu(p-k, p) G(p)], \tag{1.13}$$

де в правій частині включен множник -1 для ферміонної петлі у відповідності з правилами Феймана. Для фотонного пропагатора отримаємо інтегральне рівняння

$$D^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{0\mu\nu} + i\Pi_{\mu\nu}(k), \tag{1.14}$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\boxed{D^{-1}_{\mu\nu}(k) = D^{-1}_{0\mu\nu}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \mathrm{tr}[\gamma_\mu G(p-k)\Gamma_\nu(p-k,p)G(p)].} \tag{1.15}$$

Рівняння для вершинної частини схематично можна записати як

$$\Gamma = \gamma + \int \Gamma G G \cdot K, \tag{1.16}$$

або у більш розгорнутому вигляді

$$\boxed{\begin{gathered}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(p+q,p) = \gamma^\mu_{\alpha\beta} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[G(k+q)\Gamma^\mu(k+q,k)G(k)]_{\beta'\alpha'} \\ \times K_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(k,k+q,p+q).\end{gathered}} \tag{1.17}$$

Інтегральні рівняння для ферміонного і фотонного пропагаторів, та вершини зображені на рис.2.

Зауважимо, що ці рівняння не утворюють замкнутої системи рівнянь оскільки рівняння для вершини містить ядро K для якого треба виписати своє рівняння. Фактично, рівняння Швінгера-Дайсона утворюють нескінченну систему інтегральних рівнянь для функцій Гріна з довільним числом ферміонних і фотонних зовнішніх ліній.

2. Рівняння ШД в квантовій електродинаміці з функціонального інтеграла

Генеруючий функціонал має вигляд

$$\begin{gathered}Z(J,\eta,\bar\eta) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi \exp\Big\{ i \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ +\bar\psi(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar\eta\psi(x) + \bar\psi(x)\eta \Big]\Big\},\end{gathered} \tag{2.1}$$

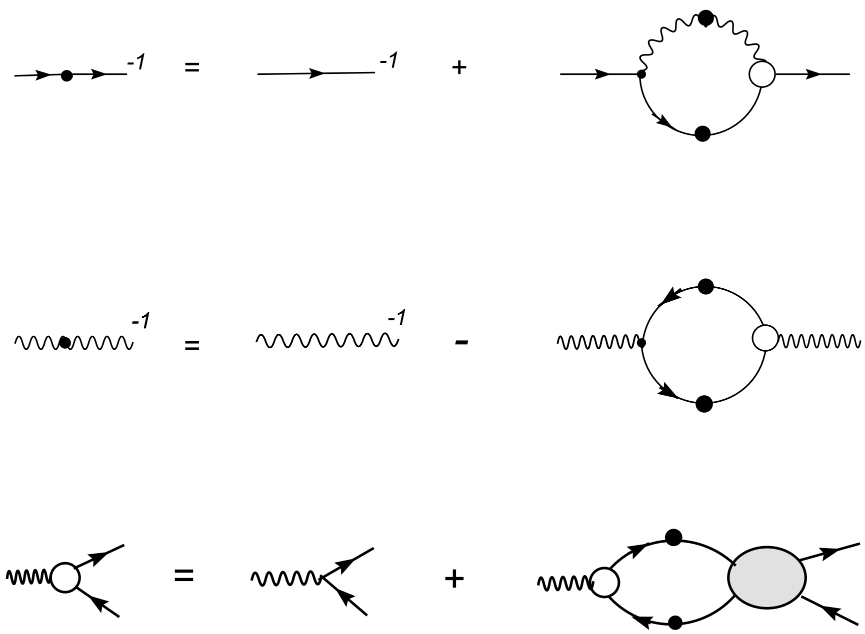

Рис. 2. Рівняння Швінгера-Дайсона (ШД) в КЕД. Повні пропагатори позначені жирною крапкою, повна вершина – світлим кружечком, а ядро K – сірим кружечком.

де $D_\mu = \partial_\mu + ie_0 A_\mu$ коваріантна похідна, а $J, \eta, \bar{\eta}$ – джерела для полів $A_\mu(x), \bar{\psi}(x), \psi(x)$, відповідно. Для сукупності полів і джерел

$$\Phi_l = \{A, \psi, \bar{\psi}\}, \qquad J_l = \{J, \eta, \bar{\eta}\},$$

запишемо генеруючий функціонал у загальному вигляді

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\Phi_l \, e^{iS(\Phi_l, J_l)}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int \mathcal{D}\Phi_l \, \frac{\delta}{\delta \Phi_l(x)} e^{iS(\Phi_l, J_l)} = 0, \tag{2.2}$$

який дорівнює нулю в силу трансляційної інваріантності функціонального інтегралу. Наприклад, для $\delta / \delta A_\mu(x)$ це буде рівність

$$i \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \, \mathcal{D}\bar{\psi} \left\{ \left[g_{\mu\nu} \Box_x - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu^x \partial_\nu^x \right] A^\nu(x) - e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi(x) + J_\mu(x) \right\} e^{iS} = 0.$$

Заміняя поля в дужці $\{\ldots\}$ функціональними похідними по відповідним джерелам, наприклад,

$$A^{\mu}(x)\, e^{iS(A_\mu,\bar{\psi},\psi)} = \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} e^{iS(A_\mu,\bar{\psi},\psi)}, \tag{2.3}$$

отримуємо функціонально-дифіренційне рівняння на генеруючий функціонал $Z[J]$:

$$\left\{ \left[g^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right]^x \frac{\delta}{i\delta J^\nu(x)} - e_0 \gamma^\mu_{\beta\alpha} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + J^\mu(x) \right\} Z[J] = 0. \tag{2.4}$$

Нагадаємо, що при диференціюванні по грасмановим змінним треба враховувати антікомутативність цих змінних та похідних по ним.

Аналогічно, у випадку ферміонних змінних

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} \left[(i\hat{D} - m)^x_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) + \eta_\alpha(x) \right] e^{iS}, \tag{2.5}$$

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta e^{iS}}{i\delta \psi_\alpha(x)} = -\int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} \left[(i\hat{D} - m)^x_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(x) + \bar{\eta}_\alpha(x) \right] e^{iS}, \tag{2.6}$$

ми замінюємо полі на варіаційні похідні

$$\psi_\alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\alpha(x)}. \quad \bar{\psi}_\alpha(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\delta}{i\delta \eta_\alpha(x)}. \tag{2.7}$$

що дає наступні функціонально-дифіренційні рівняння

$$\left\{ (i\hat{\partial} - m)^x_{\alpha\beta} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\beta(x)} - e_0 \gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}_\beta(x)} + \eta_\alpha(x) \right\} Z[J] = 0, \tag{2.8}$$

$$\left\{ (i\hat{\partial} - m)^x_{\alpha\beta} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + e_0 \gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)} \frac{\delta}{i\delta \eta_\beta(x)} + \bar{\eta}_\alpha(x) \right\} Z[J] = 0. \tag{2.9}$$

Отримані функціонально-диференційні рівняння для генеруючого функціоналу $Z[J]$ можна записати як нескінченний зацепляючий ланцюжок інтегральних рівнянь для функцій Гріна. Продемонстрируємо це на прикладі виведення рівняння ШД для фотонного пропагатора. Продиференцуємо рівняння (2.4) по $\delta/i\delta J^\lambda(y)$ і покладемо всі джерела $J, \eta, \bar\eta = 0$. Отримуємо рівняння, яке пов'язує дві кореляційні функції

$$\left[g^{\mu\nu}\Box_x - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu_x\partial^\nu_x\right]\langle 0|TA_\nu(x)A_\lambda(y)|0\rangle + \frac{1}{i}\delta^\mu_\lambda\delta(x-y)$$
$$+e_0\gamma^\mu_{\beta\alpha}\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x)A_\lambda(y)|0\rangle = 0. \tag{2.10}$$

Тут ми використали, що

$$\frac{\delta^2 Z}{i\delta J^\nu(x)i\delta J^\lambda(y)}\Big|_{J,\eta,\bar\eta=0} = \langle 0|TA_\nu(x)A_\lambda(y)|0\rangle, \tag{2.11}$$
$$\frac{\delta^3 Z}{i\delta J^\lambda(y)i\delta\bar\eta_\alpha(x)i\delta\eta_\beta(x)} = \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x)A_\lambda(y)|0\rangle. \tag{2.12}$$

Визначимо ампутовану 3-х точкову функцію $\Gamma^\nu_{\gamma\delta}(xz|y)$ наступним чином

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(z)A_\mu(y)|0\rangle = -ie_0\int d^4x'd^4z'd^4y'G_{\alpha\gamma}(x-x')\Gamma^\nu_{\gamma\delta}(x'z'|y')$$
$$\times G_{\delta\beta}(z'-z)D_{\nu\mu}(y'-y). \tag{2.13}$$

Внаслідок трансляційної інваріантності величина $\Gamma^\nu_{\gamma\delta}(xz|y)$ залежить від двох різниць координат. Здійснюючи Фур'є перетворення для величин G, D, Γ, одержимо

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(z)A_\mu(y)|0\rangle = -ie_0\int\frac{d^4p\,d^4q}{(2\pi)^8}e^{-ip(x-z)-iq(x-y)}G_{\alpha\gamma}(p)\Gamma^\nu_{\gamma\delta}(p,p+q)$$
$$\times G_{\delta\beta}(p+q)D_{\nu\mu}(q). \tag{2.14}$$

Тоді, прирівнюючи $x = z$, і використовуючи Фур'є-перетворення по $x - y$, рівняння (2.10) стає

$$-\left[g^{\mu\nu}k^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right]D_{\nu\lambda}(k) - ie_0^2\gamma^\mu_{\beta\alpha}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G_{\alpha\gamma}(p)\Gamma^\nu_{\gamma\delta}(p,p+k)$$
$$\times G_{\delta\beta}(p+k)D_{\nu\lambda}(k) + \frac{\delta^\mu_\lambda}{i} = 0, \tag{2.15}$$

або, множачи на обернену матрицю $(D^{-1})^{\lambda\nu}$,

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(k) = (D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) + (-ie_0)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}[G(p)\Gamma^\nu(p,p+k)G(p+k)\gamma^\mu], \tag{2.16}$$

де матриця

$$(D_0^{-1})^{\mu\nu}(k) = i\left[g^{\mu\nu}k^2 - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right],$$

є оберненою до матриці

$$D_{0\mu\nu}(k) = \frac{1}{ik^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right].$$

Рівняння (2.16) співпадає з раніше одержаним рівнянням (1.15).

Рівняння ШД для ферміонного пропагатора (1.12) випливає із рівняння (2.8) після диференцування по $\eta_\gamma(y)$ і покладаючи всі джерела рівними нулю (або із рівняння (2.9) диференцуванням по $\bar{\eta}_\gamma(y)$).

Аналогічно, рівняння для вершинної функції (1.17) отримується з рівняння (2.4) диференцуванням по η і $\bar{\eta}$, покладаючи $J=\eta=\bar{\eta}=0$, виконуючи ампутування і переходячи в імпульсний простір.

3. Векторні тотожності Уорда-Такахаші

В функціональному інтегралі зробимо заміну змінних, які відповідають локальному калібрувальному перетворенню

$$\psi(x) \to e^{-ie\alpha(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to e^{ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x)+\partial_\mu\alpha(x). \tag{3.1}$$

Доданки в лагранжіані, які змінюються при калібрувальних перетвореннях, мають вигляд

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \Box\alpha)^2 + J^\mu(A_\mu+\partial_\mu\alpha) + \bar{\eta}e^{-ie\alpha}\psi + \bar{\psi}e^{ie\alpha}\eta \\ &\sim -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\Box\alpha - \alpha\partial_\mu J^\mu - ie\alpha\bar{\eta}\psi + ie\alpha\bar{\psi}\eta,\end{aligned} \tag{3.2}$$

де в останньому виразі ми зберегли лінійні, інфінітезімально малі члени. Таким чином, в першому порядку по α маємо

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} \left[\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu J^\mu(x) + ie\bar{\eta}\psi(x) - ie\bar{\psi}\eta(x)\right] e^{iS(J,\bar{\eta},\eta)} = 0. \tag{3.3}$$

Заміняя поля на функціональні похідні, отримуємо тотожність, яка є наслідком калібрувальної інваріантності теорії,

$$\boxed{\left[\frac{1}{\xi}\Box^x\partial^x_\mu \frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)} + \partial^x_\mu J^\mu(x) + ie\bar{\eta}_\alpha(x)\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} - ie\eta_\alpha(x)\frac{\delta}{i\delta\eta_\alpha(x)}\right] Z[J] = 0.} \tag{3.4}$$

З цієї функціональної тотожності можно отримати безліч тотожностей для кореляційних функцій, які містять зовнішні фотонні лінії.

Наприклад, продиференцюємо (3.4) по $J_\nu(y)$ і покладемо $J = \eta = \bar{\eta} = 0$, отримуємо

$$\frac{1}{\xi}\Box^x\partial^x_\mu\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle + \frac{1}{i}\partial^x_\nu\delta(x-y) = 0. \tag{3.5}$$

В імпульсном просторі це еквівалентно

$$k^\mu D_{\mu\nu}(k) = \xi\frac{k_\nu}{ik^2}. \tag{3.6}$$

Загальна структура фотонного пропагатора

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{ik^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + d_l(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{ik^4}. \tag{3.7}$$

містить дві невідомі функції $d(k^2)$ і $d_l(k^2)$. Тотожність означає, що одна з них зафіксована

$$d_l(k^2) = \xi.$$

Так як з (3.6) для оберненого пропагатора очевидно

$$k^\nu D^{-1}_{\nu\mu}(k) = \frac{ik^2k_\mu}{\xi},$$

і для вільного пропагатора маємо аналогічну рівність

$$k^{\nu} D^{-1}_{0\nu\mu}(k) = \frac{ik^2 k_{\mu}}{\xi},$$

то з рівняння ШД

$$D^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{0\mu\nu} + i\Pi_{\mu\nu}$$

отримуємо тотожність для поляризаційного оператора

$$k^{\mu}\Pi_{\mu\nu}(k) = 0. \tag{3.8}$$

Тепер продиференцюємо тотожність (3.4) по $\frac{\delta}{i\delta\eta_{\beta}(y)}$, $\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}_{\gamma}(z)}$ при $J = \eta = \bar{\eta} = 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\xi}\Box^{x}\partial^{x}_{\mu}\langle 0|TA_{\mu}(x)\psi_{\gamma}(z)\bar{\psi}_{\beta}(y)|0\rangle + e\langle 0|T\psi_{\gamma}(z)\bar{\psi}_{\beta}(y)|0\rangle\delta(x-z)\\&-e\langle 0|T\psi_{\gamma}(z)\bar{\psi}_{\beta}(z)|0\rangle\delta(x-y) = 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Знов вводячи ампутовану вершинну функцію, і виконуючи перетворення Фур'є, отримуємо тотожність Уорда-Такахаші

$$\boxed{(-i)k^{\mu}\Gamma_{\mu}(p, p+k) = G^{-1}(p+k) - G^{-1}(p).} \tag{3.10}$$

Диференцюючи цю тотожність за фотонним імпульсом k^{μ} при $k^{\mu} = 0$, і приймаючи до уваги зв'язок повного ферміонного пропагатора з власною енергією, одержимо, що повна вершина при нульовому фотонному імпульсі задовольняє

$$\boxed{\Gamma_{\mu}(p,p) = \gamma_{\mu} - \frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^{\mu}}.} \tag{3.11}$$

Це так звана диференційна тотожність Уорда.

4. Аксіальна тотожність Уорда-Такахаші

Розглянемо функціональний інтеграл для для повного ферміонного пропагатора в квантовій електродинаміці

$$G(x_1 - x_2) = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) e^{iS(A_\mu,\bar{\psi},\psi)} \tag{4.1}$$

з дією

$$S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \int d^4x \Big[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \Big],$$

де норміровочний множник

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS(A_\mu,\bar{\psi},\psi)}.$$

Зробимо наступну заміну змінних в чисельнику функціонального інтеграла

$$\psi(x) \to e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi, \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi} e^{i\theta(x)\gamma_5}, \tag{4.2}$$

або в інфінітезімальній формі

$$\psi(x) \simeq (1 + i\theta(x)\gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(1 + i\theta(x)\gamma_5). \tag{4.3}$$

Ферміонна частина лагранжіану при цьому змінюється наступним чином (з точністю до членів лінійних по θ)

$$\begin{aligned} &\bar{\psi} e^{i\theta\gamma_5}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi \simeq i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m \\ &- \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\partial_\mu\theta - 2i\theta(x) m\bar{\psi}\gamma_5\psi, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оскільки початковий інтеграл не залежав від θ, очевидно варіація по θ повинна дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \delta_\theta(e^{iS}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) \\ &\simeq \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{iS} \int d^4x\, \big\{ [-i\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + 2\theta(x)m\bar{\psi}\gamma_5\psi(x)]\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \\ &+ i\theta(x_1)\gamma_5\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) + i\theta(x_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_5 \big\} = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Звідси, для кореляційних функцій маємо тотожність

$$
\begin{aligned}
&i\partial_\mu \langle 0|T\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\psi(x_1)\psi(x_2)|0\rangle = -2m\langle 0|T\bar{\psi}\gamma_5\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \\
&-i\delta(x-x_1)\gamma_5\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle - i\delta(x-x_2)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle\gamma_5. \quad (4.6)
\end{aligned}
$$

Визначимо ампутовані вершини $\Gamma_{\mu 5}$ і Γ_5 аналогічно тому як це зроблено в рівняннях (2.13) і (2.14),

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T\bar{\psi}(-i\gamma_\mu\gamma_5)\psi(x)\psi(x_1)\psi(x_2)|0\rangle &= \int \frac{d^4p\, d^4k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-x_1)+ik(x-x_2)} \\
&\times G(p)\Gamma_{\mu 5}(p,k)G(k), \qquad (4.7) \\
\langle 0|T\bar{\psi}(-i\gamma_5)\psi(x)\psi(x_1)\psi(x_2)|0\rangle &= \int \frac{d^4p\, d^4k}{(2\pi)^8} e^{-ip(x-x_1)+ik(x-x_2)} \\
&\times G(p)\Gamma_5(p,k)G(k). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Отримуємо аксіально-векторну тотожність Уорда-Такахаші, яка пов'язує вершини $\Gamma_{\mu 5}$, Γ_5 і ферміонний пропагатор G:

$$
\boxed{(k-p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p,k) = \gamma_5 G^{-1}(p) + G^{-1}(k)\gamma_5 + 2m_0\Gamma_5(p,k).} \qquad (4.9)
$$

У випадку безмасових ферміонів ($m_0 = 0$) і враховуючи матричну структуру повного пропагатора,

$$
G^{-1}(p) = -i[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)], \qquad (4.10)
$$

тотожність (4.9) приймає вигляд

$$
(k-p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p,k) = -i\left\{\gamma_5[\hat{p}A(p^2) - B(p^2)] + [\hat{k}A(k^2) - B(k^2)]\gamma_5\right\}. \quad (4.11)
$$

В границі коли $k \to p$

$$
\lim_{k\to p}(k-p)^\mu \Gamma_{\mu 5}(p,k) = 2i\gamma_5 B(p^2). \qquad (4.12)
$$

Звідси випливає, що вершина $\Gamma_{\mu 5}(p,k)$ повинна мати полюс при $(k-p)^2 = 0$:

$$\Gamma_{\mu 5}(p,k) \approx 2i\gamma_5 B(p^2)\frac{(k-p)_\mu}{(k-p)^2}, \qquad k \to p. \tag{4.13}$$

Легко перевірити тотожність для вільних вершин і пропагаторов, які мають вигляд

$$\Gamma_{\mu 5} = -i\gamma_\mu\gamma_5, \qquad G^{-1}(p) = \frac{\hat{p} - m_0}{i}, \qquad \Gamma_5 = -i\gamma_5,$$

Очевидно, тотожність задоволняється

$$(k-p)^\mu(-i\gamma_\mu\gamma_5) = \gamma_5\frac{\hat{p} - m_0}{i} + \frac{\hat{k} - m_0}{i}\gamma_5 - 2im_0\gamma_5.$$

5. Аномальна кіральна тотожність Уорда-Такахаші

При виведенні кіральної тотожності Уорда-Такахаші ми вважали інваріантною міру інтегрування при заміні (4.2), однак це не так. Японський фізик К. Фуджикава перший показав, що ферміонна міра не є інваріантною відносно заміни ферміонних змінних, які мають вигляд кіральних перетворень, тобто заміни

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi, \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}e^{i\alpha(x)\gamma_5}, \tag{5.1}$$

де $\alpha(x) = \alpha^a(x)T^a$ у випадку неабельових симетрій з генераторами T^a. Достатньо розглянути тільки інтегрування по ферміонам в функціональному інтегралі

$$Z = N\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\left[i\int d^4x\,\bar{\psi}i\hat{D}\psi\right]. \tag{5.2}$$

Розкладемо полі ψ по базису власних функцій ермітова оператора $i\hat{D}$,

$$i\hat{D}\Phi_m = \lambda_m\Phi_m, \qquad \bar{\Phi}_m i\hat{D} = -iD_\mu\Phi_m\gamma^\mu = \lambda_m\bar{\Phi}_m. \tag{5.3}$$

Власні цього оператора є дійсними і у відсутності калібрувального поля $(A_\mu = 0)$ задовольняють умові

$$\lambda_m^2 = k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2. \tag{5.4}$$

Для фіксованого A_μ ці значення є також асимптотичною формою власних значень λ_m при великих k. Ортонормовані власні функції ермітова оператора $i\hat{D}$ утворюють повну систему, тобто задовольняють

$$\int d^4x\, \bar{\Phi}_n(x)\Phi_m(x) = \delta_{nm}, \tag{5.5}$$

$$\sum_n \Phi_{n\alpha}(x)\bar{\Phi}_{n\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-y), \tag{5.6}$$

де n і m узагальнюють сукупність усіх квантових чисел, які включають як дискретні, так і неперервні числа; α, β є спінорними індексами. Розкладемо поля по повній системі функцій $\bar{\Phi}_n(x)$ (узагальнений ряд Фур'є):

$$\psi(x) = \sum_m a_m \Phi_m(x), \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{a}_m \bar{\Phi}_m, \tag{5.7}$$

де коефіціенти a_n, $\bar{a}_m$ є грасмановими змінними, так само як і поля ψ, $\bar{\psi}$. Використовуючи ортонормованість $\bar{\Phi}_n(x)$, знаходимо

$$a_n = \int d^4x\, \bar{\Phi}_n(x)\psi(x), \quad \bar{a}_n = \int d^4x\, \Phi_n(x)\bar{\psi}(x). \tag{5.8}$$

Ферміонну міру можна записати як

$$\mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_m da_m\, d\bar{a}_m. \tag{5.9}$$

При виводі тотожносні достатньо розглянути інфінітезімальну заміну. Якщо $\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x)$, де у випадку неабелевих симетрій $\alpha(x) = T^a\alpha^a(x)$, то коефіцієнти розкладу зв'язані наступним інфінітезімальним лінійным перетворенням

$$a'_m = \sum_n \int d^4x\, \bar{\Phi}_m(1 + i\alpha(x)\gamma_5)\Phi_n a_n = \sum_n (\delta_{mn} + C_{mn})a_n. \tag{5.10}$$

Тоді ферміонна міра перетворюється при кіральної заміні змінних як

$$\mathcal{D}\psi'\,\mathcal{D}\bar{\psi}' = J^{-2}\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}, \qquad C_{mn} = \int d^4x\,\bar{\Phi}_m i\alpha(x)\gamma_5\Phi_n(x),$$

де J — детермнант якобіана перетворення $1+C$. Для інфінітезімальних параметрів $\alpha(x)$ можна записати

$$J = \det(1+C) = e^{\mathrm{tr}\ln(1+C)} = e^{\sum_n C_{nn}},$$

або

$$\ln J = i\int d^4x\,\alpha^a(x)\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a\Phi_n(x). \tag{5.11}$$

Формально, використовуючи повноту функцій $\Phi_n(x)$, маємо

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a\Phi_n(x) = \underbrace{\mathrm{tr}(\gamma_5 T^a)}_{=0}\underbrace{\delta(x-x)}_{=\infty}. \tag{5.12}$$

тобто виникає невизначеність типу $0\times\infty$. Суму в останньому виразі потрібно попередньо регуляризовати калібрувально-інваріантним чином

$$\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a\Phi_n(x) = \lim_{M\to\infty}\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a\Phi_n(x)e^{\lambda_n^2/M^2}. \tag{5.13}$$

(Після віковського поворота знак λ_n^2 буде від'ємним). Беручи до уваги, що λ_n^2 є власним значенням оператора $(i\hat{D})^2$, запишемо, використовуючи повноту Φ_n:

$$\begin{aligned}\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a\Phi_n(x) &= \lim_{M\to\infty}\sum_n \bar{\Phi}_n(x)\gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2}\Phi_n(x)\\ &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\left[\gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2}\right]\delta(x-y)\Big|_{x=y}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Використовуючи ынтегральне представлення для дельта-функкії дію на неї нашого оператора представимо

$$\begin{aligned}e^{(i\hat{D})^2/M^2}\delta(x-y)\Big|_{x=y} &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}e^{\frac{k^2}{M^2}+2i\frac{k\cdot D}{M^2}-\frac{\hat{D}^2}{M^2}}\Big|_{x=y}\\ &= M^4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{k^2}e^{2i\frac{kD}{M}-\frac{\hat{D}^2}{M^2}}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

В границі $M \to \infty$ внесок дадуть тільки ті доданки розкладу експоненти, які містять не менш 4-х гама-матриць, тому

$$\lim_{M\to\infty} \operatorname{tr}\left[\gamma_5 T^a e^{(i\hat{D})^2/M^2}\right] \delta(x-y)\Big|_{x=y} = \operatorname{tr}\left[\gamma_5 T^a \cdot \frac{1}{2}\hat{D}^4\right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2}. \quad (5.16)$$

Після віковського повороту $k_0 = ik_4$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2} = i \int\limits_E \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} = \frac{i}{(2\pi)^4}\pi^2 = \frac{i}{16\pi^2}.$$

Для обчислення следа врахуємо, що

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a, \qquad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a,$$

$$(i\hat{D})^2 = -D_\mu^2 - \frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2},$$

тобто із $\hat{D}^4$ внесок дає тільки

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[\gamma_5 T^a \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2\right] \cdot \frac{i}{16\pi^2} &= \frac{ig^2}{4\cdot 32\pi^2} \operatorname{tr}(T^aT^bT^c) \operatorname{tr}(\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho}) F^{b\mu\nu}F^{c\lambda\rho} \\ &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \operatorname{tr}(T^aT^bT^c)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}. \qquad (5.17)\end{aligned}$$

При обрахуванні останньої рівності ми використали наступний слід гама-матриць

$$\operatorname{tr}(\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho}) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \qquad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

В результаті

$$J = \exp\left[-\frac{ig^2}{32\pi^2}\int d^4x \alpha^a(x) \operatorname{tr}(T^aT^bT^c)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}\right],$$

і генеруючий функціонал після заміни змінних і враховуючи варіацію дії, приймає вигляд

$$\begin{aligned}Z = N\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\Bigg\{i\int d^4x\Bigg[\bar{\psi}i\hat{D}\psi + \alpha^a\partial_\mu j_5^{a\mu} + \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\alpha^a(x)\operatorname{tr}(T^aT^bT^c) \\ \times\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{b\mu\nu}F^{c\lambda\rho}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Оскільки це лише заміна змінних, то вона не міняє значення інтеграла при будь-якій α, тоді, розкладаючи по інфінітезімальним $\alpha(x)$ і прирівнюючи нулєві вираз при довільному $\alpha(x)$, знаходимо для середнього значення дивергенції струму

$$\langle \partial_\mu j_5^{a\mu} \rangle = -\frac{g^2}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}(T^a T^b T^c)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{b\mu\nu}F^{c\lambda\rho} = -\frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}(T^a\{T^b, T^c\})\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{b\mu\nu}F^{c\lambda\rho}, \tag{5.19}$$

де кіральний струм визначений як

$$j_5^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi.$$

Для дійсних представлень стверджується рівність $T_a^T = -T_a$, для них коефіцієнти d_{abc} щезають

$$d_{abc} = \mathrm{tr}(T_a\{T_b, T_c\}) = \mathrm{tr}(T_a^T\{T_b^T, T_c^T\}) = -d_{abc} = 0,$$

тобто аномальна права частина зникає, і кіральний ток зберігається.

Якщо робити кіральну заміну в (5.1) з одиничною матрицею замість матриць T^a ()абельові кіральні заміни для ферміонів), то кіральний струм буде $j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$. Позначаючи величину

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}) = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}),$$

яка называється густиною Черна-Понтрягіна, для синглетного струму маємо аномальну дивергенцію

$$\langle \partial^\mu j_{\mu 5}(x) \rangle = -g^2\mathcal{A}(x). \tag{5.20}$$

Ми вже показували, що

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}) = 8\partial_\lambda K^\lambda,$$

$$K^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\mathrm{tr}(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3}A_\mu A_\nu A_\lambda).$$

Тому можна було б ввести новий зберігаючий струм

$$J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + \frac{g^2}{2\pi^2}K^\mu,$$

але він не калібрувально інваріантен. Аномалія в дивергенції кірального струма приводить до незбереження кірального заряду. Дійсно, інтегруючи вираз (5.20) по тривимірному об'єму, отримуємо зміну заряду для топологічно нетрівіальних конфігурацій калібрувального поля

$$\triangle Q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt(\partial_0 Q) = -g^2 \int d^4x\, \mathcal{A}(x) = n.$$

В КЕД просто маємо для дивергенції кірального струму

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = -\frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}.$$

В розмірності $d = 2n$

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = (-1)^{n+1}\frac{2e^n}{n!(4\pi)^n}\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2n}}F_{\mu_1\mu_2}\dots F_{\mu_{2n-1}}F_{\mu_{2n}}.$$

$n = 1$, $d = 2$

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = \frac{e}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

В загальному випадку

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T\psi,$$

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = -\frac{g^2}{16\pi^2}\,\mathrm{tr}(TT^aT^b)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{a\mu\nu}F^{b\lambda\rho}.$$

Наприклад, при кіральних перетвореннях u і d кварки перетворюються

$$u \to e^{i\alpha\gamma_5}u, \qquad d \to e^{-i\alpha\gamma_5}d, \qquad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_3\psi = \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d,$$

$$T = \tau_3.$$

Аномалія скорочюється. Це буде справедливо і для кірального струму, який відповідає групі $SU(N)$

$$j^i_{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 t^i\psi, \qquad \psi \to e^{i\alpha^i t^i \gamma_5}\psi.$$

Таким чином, глюонні доданки в кіральному струмі для групи $SU(N)$ відсутні.

З іншого боку, при наявності електромагнітного поля ці струму мають аномалію, наприклад ($D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, q — зарядова матриця кварків)

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}\,\mathrm{tr}\{q^2\tau_3\},$$

$$\mathrm{tr}\{q^2\tau_3\} = N_c\left(\frac{2e}{3}\right)^2\cdot(+1) + N_c\left(-\frac{e}{3}\right)^2\cdot(-1) = \frac{N_c e^2}{3},$$

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{N_c e^2}{48\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}.$$

Ця аномалія (Адлера-Белла-Джеківа) проявляється у розпаді $\pi^0 \to 2\gamma$.

Співвідношення

$$\partial_\mu j^\mu_5 = -\frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}$$

насправді є операторною тотожністю справедливою у всіх порядках теорії збурень (тобто радиаційні поправки до неї вищих порядків дорівнюють нулю).

Це теорема Адлера-Бардіна.

Інстантонні розв'язки призводять до глобального незбереження кірального заряду Q_5.