Неабелевы симметрии и теория Янга-Миллса

27 марта 2020 г.

Повторение: группы

Важной частью любой теории поля являются симметрии. Пространство симметрий обладает структурой группы:

1. $g \cdot h \in G, \quad \forall g, h \in G$ (замкнутость умножения)
2. $\exists! e \in G, \quad e \cdot g = g \cdot e = g, \quad \forall g \in G$ (единица группы)
3. $\forall g \in G \quad \exists! g^{-1}, \quad g \cdot g^{-1} = e$ (обратный элемент)
4. $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$ (ассоциативность умножения)

Повторение: группы Ли

Особый интерес представляют непрерывные симметрии. Например:

1. трансляции: $x \to x + a$
2. повороты: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
3. преобразование масштаба: $x \to \lambda x$

Повторение: группы Ли

Пространство непрерывных симметрий обладает структурой группы Ли. Помимо стандартных аксиом группы необходимо добавить:

1. группа Ли есть дифференцируемое многообразие
2. умножение элементов группы и взятие обратного являются дифференцируемыми отображениями

Далее нас будут интересовать **матричные группы** — это такие группы, элементами которых есть невырожденные матрицы.

Повторение: примеры групп Ли

Вот несколько примеров матричных групп Ли:

1. $U(1) = \left\{ e^{i\alpha} \middle| \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
2. $SU(N) = \left\{ A \in Mat(N \times N, \mathbb{C}) \middle| \quad AA^{\dagger} = 1, \quad \det A = 1 \right\}$
3. $SO(N) = \left\{ A \in Mat(N \times N, \mathbb{R}) \middle| \quad AA^{T} = 1, \quad \det A = 1 \right\}$

Повторение: алгебры Ли

Важную роль в анализе групп Ли играют **алгебры Ли**. Геометрически алгебра Ли есть касательное пространство к группе Ли в единице. Как и любое касательное пространство, алгебра Ли является векторным пространством, но помимо этого:

1. $[x, y] \in \mathfrak{g}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$ (замкнутость умножения)
2. $[x, y] = -[y, x], \quad [ax + bz, y] = a[x, y] + b[z, y]$ (антисимметричность и биллинейность коммутатора)
3. $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (тождество Якоби)

Повторение: алгебры Ли

В качестве примера рассмотрим как получить алгебру Ли для группы $SU(N)$. Любой элемент группы, в окрестности единицы имеет вид:

$$A(t) = 1 + t \cdot a + O(t^2), \quad a \in Mat(N \times N), |t| << 1$$

Из условия унитарности для A(t) получаем:

$$1 = A^\dagger(t)A(t) = (1 + t \cdot a^\dagger + \ldots)(1 + t \cdot a + \ldots) = 1 + t(a + a^\dagger) + \ldots$$

Что означает, что матрица a — антиэрмитова. Из условия $\det A(t) = 1$ получаем, что $\mathrm{Tr}(a) = 0$.

Повторение: представления групп и алгебр Ли

В приложениях часто возникает ситуация, когда группы (алгебры) Ли действуют на некотором векторном пространстве V, называемым представлением группы (алгебры). Далее мы будем рассматривать такие представления:

1. фундаментальное представление:
   $A \triangleright v = Av, \quad v \in V, \quad A \in G$
2. сопряженное к фундаментальному:
   $A \triangleright v = vA^*, \quad v \in V^*, \quad A \in G$
3. присоединенное представление:
   $A \triangleright v = AvA^{-1}, \quad v \in \mathfrak{g}, \quad A \in G$

Абелева глобальная симметрия

Теория комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

инвариантна относительно глобальных преобразований

$$\phi(x) \to e^{i\alpha} \phi(x)$$

Это $U(1)$ симметрия, поскольку $e^{i\alpha} \in U(1)$, и это абелева симметрия, поскольку $U(1)$ - абелева группа.

Неабелева глобальная симметрия

Простейшая модель, обладающая глобальной неабелевой симметрией, - это модель N комплексных скалярных полей с лагранжианом

$$L = \partial_\mu \phi_i^* \partial_\mu \phi_i - m^2 \phi_i^* \phi_i - \lambda (\phi_i^* \phi_i)^2$$

Лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\phi_i(x) \to \omega_{ij} \phi_j(x), \quad \phi_i^*(x) \to \phi_k^*(x) \omega_{ik}^*$$

где ω - произвольная матрица из $SU(N)$.

Неабелева глобальная симметрия

Объединим N скалярных полей в столбец:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

Тогда лагранжиан и глобальное $SU(N)$-преобразование принимают более компактный вид:

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\phi(x) \to \omega \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \to \phi^\dagger(x) \omega^\dagger \quad \omega \in SU(N)$$

Неабелева глобальная симметрия

Объединим N скалярных полей в столбец:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

Тогда лагранжиан и глобальное $SU(N)$-преобразование принимают более компактный вид:

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\phi(x) \to \omega \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \to \phi^\dagger(x) \omega^\dagger \quad \omega \in SU(N)$$

Можно также сказать, что поле $\phi(x)$ принадлежит фундаментальному представлению группы $SU(N)$, а, поле $\phi^\dagger(x)$ сопряженному фундаментальному.

Неабелева глобальная симметрия (обобщение)

В более общем случае, вместо $SU(N)$ можно рассматривать **компактные группы Ли**, а вместо фундаментального представления любое другое представление. А именно, пусть G компактная группа Ли и $T(G)$ некоторое унитарное представление G, и пусть также поле $\phi(x)$ лежит в пространстве этого представления. В этом случае лагранжиан вида:

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi^\dagger, \phi)$$

$$V(\phi^\dagger T^\dagger(\omega), T(\omega)\phi) = V(\phi^\dagger, \phi)$$

инвариантен относительно следующих преобразований:

$$\phi(x) \to T(\omega)\phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \to \phi^\dagger(x) T^\dagger(\omega)$$

Пример 1

Пусть ϕ и χ - два столбца из N комплексных скалярных полей. Тогда лагранжиан

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + \partial_\mu \chi^\dagger \partial_\mu \chi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi - m_\chi^2 \chi^\dagger \chi \\ - \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 - \lambda_2 [(\phi^\dagger \chi)^2 + (\chi^\dagger \phi)^2] - \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2$$

инвариантен относительно преобразований группы $SU(N)$

$$\phi \to \omega \phi, \quad \chi \to \omega \chi, \quad \omega \in SU(N)$$

Пример 2

Рассмотрим поле $\phi(x)$ преобразующееся по фундаментальному представлению и поле $\xi(x)$ преобразующееся по присоединенному представлению группы $SU(2)$:

$$\phi \to \omega\phi, \quad \xi \to \omega\xi\omega^{-1}$$

В качестве базиса присоединенного представления можно выбрать τ^a — матрицы Паули и поэтому $\xi(x) = \xi^a(x)\tau^a$. Можно проверить, что лагранжиан:

$$L = \partial_\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi + \partial_\mu\xi^a\partial_\mu\xi^a - \lambda_1(\phi^\dagger\phi)^2 - \lambda_2(\xi^a\xi^a)^2 - \lambda_3\phi^\dagger(\tau^a\xi^a)\phi$$

инвариантен относительно действия группы.

Повторение: взаимодействие скалярного поля с электромагнитным

Скалярное комплексное поле ϕ со стандартным лагранжианом

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

инвариантно относительно глобальных преобразований

$$\phi(x) \to e^{i\alpha} \phi(x)$$

но не инвариантно относительно локальных преобразований

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)} \phi(x)$$

потому что при калибровке в лагранжиане появляются члены пропорциональные $\partial_\mu \alpha(x)$

Повторение: взаимодействие скалярного поля с электромагнитным

Чтобы это исправить и сделать теорию инвариантной относительно неглобальных преобразований, можно ввести взаимодействие скалярного поля с электромагнитным. Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом $A_\mu(x)$. При калибровке

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

в A_μ как раз появляются члены, пропорциональные $\partial_\mu\alpha$. Здесь e - параметр.

Повторение: взаимодействие скалярного поля с электромагнитным

Поэтому чтобы получить инвариантный лагранжиан, заменим производные $\partial_\mu \phi$ на модифицированные (ковариантные) производные

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$$

При этом эти новые производные сводятся к обычным в пределе слабого электромагнитного поля и, как легко проверить, при калибровке преобразовываются по закону

$$D_\mu \phi \to e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi$$

Повторение: взаимодействие скалярного поля с электромагнитным

Таким образом лагранжиан

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

инвариантен относительно произвольных (а не только глобальных) калибровочных преобразований из $U(1)$. Первый член здесь - лагранжиан электромагнитного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - тензор электромагнитного поля.

Неабелева калибровочная симметрия

Попробуем теперь обобщить изложенный метод для получения теории, инвариантной относительно преобразований $SU(2)$. Возьмем для начала лагранжиан, инвариантный относительно глобальных преобразований

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

где $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ - комплексный столбец. Если же попытаться рассмотреть неглобальные преобразования

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \omega(x)\phi(x), \quad \omega(x) \in SU(2)$$

то в преобразованном лагранжиане появятся члены с $\partial_\mu \omega(x)$.

Калибровочное поле

Чтобы сделать лагранжиан калибровочно инвариантным, заменим обычную производную ∂_μ на ковариантную $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, и потребуем:

$$(D_\mu \phi)' = \omega(x) D_\mu \phi$$

Здесь поле A_μ — 2×2 матрица, которая преобразуется при калибровочных преобразованиях:

Калибровочное поле

Чтобы сделать лагранжиан калибровочно инвариантным, заменим обычную производную ∂_μ на ковариантную $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, и потребуем:

$$(D_\mu \phi)' = \omega(x) D_\mu \phi$$

Здесь поле A_μ — 2×2 матрица, которая преобразуется при калибровочных преобразованиях:

$$A_\mu \to A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

Калибровочно инвариантный лагранжиан скалярного поля

Итого, калибровочное поле $A_\mu(x)$ - векторное поле со значениями в алгебре Ли $SU(2)$. Его называют полем Янга-Миллса. Калибровочные преобразования имеют вид:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \omega(x)\phi(x)$$
$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \omega(x)\partial_\mu\omega^{-1}(x)$$

А инвариантный лагранжиан скалярного поля равен

$$L = (D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad D_\mu\phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi$$

Свойства поля A_μ

Рассмотрим очень маленькое калибровочное преобразование:

$$\omega(x) = 1 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \in ASU(2)$$

При этом поле A_μ преобразуется к виду:

Свойства поля A_μ

Рассмотрим очень маленькое калибровочное преобразование:

$$\omega(x) = 1 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \in ASU(2)$$

При этом поле A_μ преобразуется к виду:

$$A'_\mu = A_\mu + [\epsilon, A_\mu] - \partial_\mu \epsilon + O(\epsilon^2)$$

Свойства поля A_μ

Рассмотрим очень маленькое калибровочное преобразование:

$$\omega(x) = 1 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \in ASU(2)$$

При этом поле A_μ преобразуется к виду:

$$A'_\mu = A_\mu + [\epsilon, A_\mu] - \partial_\mu \epsilon + O(\epsilon^2)$$

Минимальное пространство, инвариантное относительно таких преобразований есть $ASU(2)$.

Лагранжиан калибровочного поля

Построим лагранжиан для калибровочного поля A_μ по аналогии с лагранжианом электродинамики. При глобальных преобразованиях A_μ преобразуется по присоединенному представлению группы:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \omega A_\mu(x) \omega^{-1}$$

Выражение $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ преобразуется также. Потому, потребуем:

$$F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}$$

Тогда инвариантный лагранжиан будет иметь вид:

$$L \sim Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

Лагранжиан калибровочного поля

Посмотрим во что переходит $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ при калибровочном преобразовании:

Лагранжиан калибровочного поля

Посмотрим во что переходит $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ при калибровочном преобразовании:

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \omega \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \omega^{-1} + \partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1} - \\ - \partial_\nu \omega A_\mu \omega^{-1} - \omega A_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1} - \partial_\nu \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

Модифицируем $F_{\mu\nu}$ следующим образом:

Лагранжиан калибровочного поля

Посмотрим во что переходит $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ при калибровочном преобразовании:

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \omega\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\omega^{-1} + \partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1} - \\ -\partial_\nu \omega A_\mu \omega^{-1} - \omega A_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1} - \partial_\nu \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

Модифицируем $F_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Можно проверить, что:

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x)$$

Калибровочно инвариантный лагранжиан имеет вид:

$$L_A = \frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad g^2 > 0$$

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) =$$

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) = -g^2/2 \cdot \delta_{ab}$$

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) = -g^2/2 \cdot \delta_{ab}$$

Поскольку $A_\mu, F_{\mu\nu} \in ASU(2)$, то:

$$A_\mu(x) = e^a A^a_\mu(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = e^a F^a_{\mu\nu}(x), \quad A^a_\mu, F^a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) = -g^2/2 \cdot \delta_{ab}$$

Поскольку $A_\mu, F_{\mu\nu} \in ASU(2)$, то:

$$A_\mu(x) = e^a A^a_\mu(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = e^a F^a_{\mu\nu}(x), \quad A^a_\mu, F^a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

Найдем как выражается $F^a_{\mu\nu}$ через A^a_μ:

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) = -g^2/2 \cdot \delta_{ab}$$

Поскольку $A_\mu, F_{\mu\nu} \in ASU(2)$, то:

$$A_\mu(x) = e^a A^a_\mu(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = e^a F^a_{\mu\nu}(x), \quad A^a_\mu, F^a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

Найдем как выражается $F^a_{\mu\nu}$ через A^a_μ:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

В итоге, Лагранжиан Янга-Миллса принимает вид:

Учет структуры $ASU(2)$

Выберем в качестве базиса $ASU(2)$ матрицы $e^a = -i\frac{g}{2}\tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. Матрицы e^a коммутируют так:

$$[e^a, e^b] = g\varepsilon^{abc}e^c$$

Также нам потребуется:

$$Tr(e^a \cdot e^b) = -g^2/2 \cdot \delta_{ab}$$

Поскольку $A_\mu, F_{\mu\nu} \in ASU(2)$, то:

$$A_\mu(x) = e^a A^a_\mu(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = e^a F^a_{\mu\nu}(x), \quad A^a_\mu, F^a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

Найдем как выражается $F^a_{\mu\nu}$ через A^a_μ:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

В итоге, Лагранжиан Янга-Миллса принимает вид:

$$L_A = -1/4 \cdot F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$$

Знак лагранжиана

Рассмотрим лагранжиан Янга-Миллса в приближении малого поля. Членами третьего и четвертого порядка по A_μ можно пренебречь. В этом случае:

Знак лагранжиана

Рассмотрим лагранжиан Янга-Миллса в приближении малого поля. Членами третьего и четвертого порядка по A_μ можно пренебречь. В этом случае:

$$L_A \approx -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)$$

Получается три копии лагранжиана электродинамики, для которой энергия поля положительна.

Конец

Спасибо за внимание!