Теория Янга-Миллса

3 апреля 2020 г.

Повторение: Неабелевы глобальные симметрии

С глобальной $U(1)$-симметрией (абелевой) мы уже встречались ранее:

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x).$$

Это можно обобщить на случай неабелевой симметрии. Простейший пример - это модель N комплексных скалярных полей ϕ_i с лагранжианом

$$L = \partial_\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2.$$

Тогда лагранжиан инвариантен относительно таких (неабелевых) преобразований:

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = \omega_{ij}\phi_j(x).$$

Повторение: Неабелевы калибровочные поля

Для получения теории Янга-Миллса мы берем лагранжиан скалярного поля, инвариантный относительно глобальных преобразований группы $SU(2)$

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

и добавляем калибровочное поле $A_\mu(x)$, так, чтобы модифицированный лагранжиан, в котором обычные производные заменены на ковариантные, был инвариантен уже относительно всех преобразований $SU(2)$

$$L = (D_\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2,$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi.$$

Повторение: Неабелевы калибровочные поля

При этом мы находим и то, как преобразовывается поле A_μ при калибровке

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \omega(x)\phi(x),$$
$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \omega(x)\partial_\mu\omega^{-1}(x).$$

После этого мы ищем лагранжиан для калибровочного поля. Делаем это по аналогии с электродинамикой. Сначала замечаем, что выражение $(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)$ не инвариантно относительно всех калибровочных преобразований, а только относительно глобальных, при этом при глобальных

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega F_{\mu\nu}(x)\omega^{-1}.$$

Повторение: Неабелевы калибровочные поля

Поэтому мы модифицируем $F_{\mu\nu}$, чтобы оно преобразовывалось точно так же и при всех преобразованиях. Наиболее простой вариант

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

После этого лагранжиан уже можно выбрать по аналогии с электродинамикой

$$L_A = \frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}).$$

Повторение: Неабелевы калибровочные поля

Вся теория имеет такой вид:

$$L = D_\mu \phi^\dagger D_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 + \frac{1}{2g^2} Tr(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}),$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu];$$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \omega(x)\phi(x),$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \omega(x) A_\mu(x) \omega^{-1}(x) + \omega(x) \partial_\mu \omega^{-1}(x),$$

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x), F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x)$$

$$A_\mu(x) \in ASU(2), \quad \omega(x) \in SU(2).$$

Повторение: Тензор напряженности

Тензор напряженности в электродинамике может быть записан в виде

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu],$$

поскольку

$$[\partial_\mu, A_\nu] =$$

Повторение: Тензор напряженности

Тензор напряженности в электродинамике может быть записан в виде

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu],$$

поскольку

$$[\partial_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu.$$

Данная формула обобщается на неабелев случай. Благодаря такой записи гораздо проще получить:

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x)$$

Повторение: Тензор напряженности

Тензор напряженности в электродинамике может быть записан в виде

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu],$$

поскольку

$$[\partial_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu.$$

Данная формула обобщается на неабелев случай. Благодаря такой записи гораздо проще получить:

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = \omega(x) F_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x)$$

это следует из того, что

$$D_\mu \to D'_\mu = \omega(x) D_\mu \omega^{-1}(x)$$

Обобщение на другие группы

Обобщение на другие группы производится без труда. Для этого достаточно заменить $\omega(x)$ на элемент группы Ли G, и теперь A_μ - элемент алгебры AG.
Все формулы преобразований остаются прежними: для их вывода мы не использовали тот факт, что $\omega(x)$ - элемент группы $SU(2)$.

Разложение по генераторам

Разложим поле $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = g t^a A^a_\mu(x),$$

где t^a - генераторы алгебры.
Найдем вид тензора $F_{\mu\nu}$ разложенного по генераторам.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

Разложение по генераторам

Разложим поле $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = gt^a A_\mu^a(x),$$

где t^a - генераторы алгебры.
Найдем вид тензора $F_{\mu\nu}$ разложенного по генераторам.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$
$$gt^a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC_{abc}A_\mu^b A_\nu^c).$$

Тут мы использовали то, что $[t^b, t^c] = C_{abc}t^a$, где C_{abc} - структурные константы алгебры AG.

Обобщение на произвольные представления

Ковариантная производная при калибровочных преобразованиях переходит в

$$(D_\mu \phi)' = T(\omega) D_\mu \phi.$$

Это можно проверить, если доказать, что

$$T(\omega A_\mu \omega^{-1}) = T(\omega) T(A_\mu) T(\omega^{-1}),$$
$$T(\omega \partial_\mu \omega^{-1}) = T(\omega) \partial_\mu T(\omega^{-1}).$$

Обобщение на произвольные представления

Ковариантная производная при калибровочных преобразованиях переходит в

$$(D_\mu\phi)' = T(\omega)D_\mu\phi.$$

Это можно проверить, если доказать, что

$$T(\omega A_\mu \omega^{-1}) = T(\omega)T(A_\mu)T(\omega^{-1}),$$
$$T(\omega\partial_\mu\omega^{-1}) = T(\omega)\partial_\mu T(\omega^{-1}).$$

Лагранжиан такой теории имеет форму:

$$L = D_\mu\phi^\dagger D_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2.$$

Пример: скалярное поле в присоединенном представлении

Рассмотрим SU(2)- теорию, в которой поле $\varphi(x)$ преобразуется по присоединенному представлению:

$$\varphi(x) \to \omega(x)\varphi(x)\omega^{-1}(x), \quad \varphi(x) \in ASU(2)$$

В этом случае ковариантная производная есть:

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ad(A_\mu)\varphi = \partial_\mu \varphi + [A_\mu, \varphi]$$

Пример: скалярное поле в присоединенном представлении

Рассмотрим SU(2)- теорию, в которой поле $\varphi(x)$ преобразуется по присоединенному представлению:

$$\varphi(x) \to \omega(x)\varphi(x)\omega^{-1}(x), \quad \varphi(x) \in ASU(2)$$

В этом случае ковариантная производная есть:

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + ad(A_\mu)\varphi = \partial_\mu\varphi + [A_\mu, \varphi]$$

Выразим все через действительные поля A_μ^a, φ^a:

$$\varphi = t^a\varphi^a, \quad A_\mu = -igt^a A_\mu^a, \quad D_\mu\varphi = t^a(D_\mu\varphi)^a, \quad t^a = \frac{1}{2}\tau^a$$

Пример: скалярное поле в присоединенном представлении

Действительные компоненты ковариантной производной примут вид:

$$(D_\mu \varphi)^a = \partial_\mu \varphi^a + g\varepsilon^{abc} A^b_\mu \varphi^c$$

Пример: скалярное поле в присоединенном представлении

Действительные компоненты ковариантной производной примут вид:

$$(D_\mu \varphi)^a = \partial_\mu \varphi^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c$$

В качестве кандидатов на роль слагаемых в лагранжиане можно выбрать:

Пример: скалярное поле в присоединенном представлении

Действительные компоненты ковариантной производной примут вид:

$$(D_\mu\varphi)^a = \partial_\mu\varphi^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b\varphi^c$$

В качестве кандидатов на роль слагаемых в лагранжиане можно выбрать:

$$Tr\left(D_\mu\varphi D^\mu\varphi\right) = \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^a(D^\mu\varphi)^a, \quad Tr\left(\varphi^2\right) = \frac{1}{2}\varphi^a\varphi^a$$

Но можно придумать ещё...

Уравнения движения: ЯМ+материя

Рассмотрим действие для скалярного поля ϕ вместе с калибровочным полем A_μ:

$$S = S_A + S_\phi,$$

где

$$S_A = \int d^4x(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}), \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

$$S_\phi = \int d^4x[(D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2], \quad D_\mu\phi = (\partial_\mu - igT^aA^a_\mu)\phi$$

Уравнения без материи

Для нахождения уравнений поля ЯМ, найдем вариацию действия S_A по действительным полям A_μ^a

$$\delta S_A = \int d^4x(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \delta F_{\mu\nu}^a).$$

Преобразовав это, получаем, что

Уравнения без материи

Для нахождения уравнений поля ЯМ, найдем вариацию действия S_A по действительным полям A^a_μ

$$\delta S_A = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} \delta F^a_{\mu\nu}\right).$$

Преобразовав это, получаем, что

$$\partial_\mu F^a_{\mu\nu} + g C^{abc} A^b_\mu F^c_{\mu\nu} = (D_\mu F_{\mu\nu})^a = 0,$$

здесь имеется ввиду:

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = [D_\mu, F_{\mu\nu}]^a$$

ибо $F_{\mu\nu}$ преобразуется по присоединенному представлению.

Уравнения для калибровочного поля

Вторым уравнением, для поля A_μ, есть тождество Бьянки:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(D_\nu F_{\lambda\rho})^a = 0$$

Чтобы это проверить, запишем:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$$

Уравнения для калибровочного поля

Вторым уравнением, для поля A_μ, есть тождество Бьянки:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(D_\nu F_{\lambda\rho})^a = 0$$

Чтобы это проверить, запишем:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$$

тождество Бьянки станет выглядеть так:

$$[D_\nu, [D_\lambda, D_\rho]] + [D_\rho, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\lambda, [D_\rho, D_\nu]] = 0, \quad \nu \neq \lambda \neq \rho \neq \nu$$

Эти два уравнения - аналогичны уравнениям Максвелла:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0.$$

Учет материи

Рассмотрим теперь вариацию действия S_ϕ по полю A^a_μ. Учтем, что

$$\delta(D_\mu\phi) = -igT^a\phi\delta A^a_\mu,$$
$$\delta(D_\mu\phi)^\dagger = ig\phi^\dagger T^a\delta A^a_\mu.$$

Тогда

$$\delta S_\phi = \int d^4x[(D_\nu\phi)^\dagger(-igT^a\phi) + ig\phi^\dagger T^a D_\nu\phi]\delta A^a_\mu.$$

Уравнение калибровочного поля в присутствии полей материи

Введем ток

$$j^a_\nu = -i[\phi^\dagger T^a D_\nu \phi - (D_\nu \phi)^\dagger T^a \phi].$$

Тогда

$$\delta S_\phi = \int d^4x(-gj^a_\nu)\delta A^a_\mu.$$

С учетом уравнения для одного калибровочного поля получаем (из требования равенства нулю вариации полного действия $(S_A + S_\phi)$ такое уравнение:

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = gj^a_\nu.$$

Уравнения для скалярного поля

Найдем вариацию действия S_ϕ по полю $\phi^\dagger$:

$$\delta S_\phi = \int d^4x[(\partial_\mu \delta\phi^\dagger + igA^a_\mu \delta\phi^\dagger T^a)D_\mu\phi - m^2\delta\phi^\dagger\phi - 2\lambda(\phi^\dagger\phi)\delta\phi^\dagger\phi].$$

Интегрируя в первом слагаемом по частям и требуя равенства $\delta S_\phi = 0$, находим уравнение

$$(\partial_\mu - igA^a_\mu T^a)D_\mu\phi + m^2\phi + 2\lambda(\phi^\dagger\phi)\phi = 0.$$

Или

$$D_\mu D_\mu\phi + m^2\phi + 2\lambda(\phi^\dagger\phi)\phi = 0.$$

Уравнения движения: ЯМ+материя

В итоге получаем систему уравнений

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = g j^a_\nu,$$
$$D_\mu D_\mu \phi + m^2 \phi + 2\lambda(\phi^\dagger \phi)\phi = 0$$

где ток:

$$j^a_\nu = -i[\phi^\dagger T^a D_\nu \phi - (D_\nu \phi)^\dagger T^a \phi].$$

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Есть минимум 2 способа получить тензор-энергии импульса в теории поля:

- используя теорему Нетер для пространственных трансляций
$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^I)} \partial_\nu \Phi^I - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}$$
- варьируя действие по метрике
$$\delta S = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Рассмотрим как получить тензор ЭИ в электродинамике:

- Запишем действие в общековариантом виде:

$$\int \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) d^4x \to \int \left(-\frac{1}{4} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, d^4x$$

- Варьируем по метрике, используя формулу:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad g = \det g_{\mu\nu}$$

получаем

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Рассмотрим как получить тензор ЭИ в электродинамике:

- Запишем действие в общековариантом виде:

$$\int \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) d^4x \to \int \left(-\frac{1}{4}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,d^4x$$

- Варьируем по метрике, используя формулу:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\cdot g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad g = \det g_{\mu\nu}$$

получаем

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Похожее вычисление можно проделать для теории ЯМ:

$$L_A = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$$

Получим такой тензор ЭИ:

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Похожее вычисление можно проделать для теории ЯМ:

$$L_A = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$$

Получим такой тензор ЭИ:

$$T^{(A)}_{\mu\nu} = -F^a_{\mu\lambda} F^{a\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^{a\alpha\beta}$$

Энергия же поля:

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

Похожее вычисление можно проделать для теории ЯМ:

$$L_A = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$$

Получим такой тензор ЭИ:

$$T^{(A)}_{\mu\nu} = -F^a_{\mu\lambda} F^{a\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} F^{a\alpha\beta}$$

Энергия же поля:

$$E^{(A)} = \int T^{(A)}_{00} d^3x = \int d^3x \left(\frac{1}{2} F^a_{0i} F^a_{0i} + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right), i, j = 1, 2, 3.$$

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

В теории скалярного поля, взаимодействуещего с калибровочным полем:

$$L_\phi = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

Тензор ЭИ выглядит так:

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

В теории скалярного поля, взаимодействуещего с калибровочным полем:

$$L_\phi = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$$

Тензор ЭИ выглядит так:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = 2 D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L_\phi$$

А энергия поля:

Тензор энергии-импульса в неабелевой калибровочной теории

В теории скалярного поля, взаимодействуещего с калибровочным полем:

$$L_\phi = D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

Тензор ЭИ выглядит так:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = 2D_\mu\phi^\dagger D_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}L_\phi$$

А энергия поля:

$$E^{(\phi)} = \int d^3x \left(D_0\phi^\dagger D_0\phi + D_i\phi^\dagger D_i\phi + m^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2\right)$$

Конец

Спасибо за внимание!

Не простая группа?

Для компактных, но не простых групп, удобнее всего иметь дело с каждой из компонент $U(1)$ и каждой из простых компонент по отдельности. (Напомним, что каждую компактную алгебру можно представить единственным образом в виде прямой суммы некоторого количества подалгебр $U(1)$ и простых подалгебр. Соответствующая этой алгебре группа локально представима в виде прямого произведения $U(1)$ и простых групп. Например, группы $SU(n)$ - простые).

Пример не простой группы

Рассмотрим такой пример.
Пусть $\phi_{i\alpha}(x)$ - набор из $m \cdot n$ комплексных полей, $i = 1, ..., n$; $\alpha = 1, ..., m$. Этот набор реализует прямое произведение $SU(n) \times SU(m)$ групп $SU(n)$ и $SU(m)$. Изначально лагранжиан имел форму

$$L = \partial_\mu \phi^*_{i\alpha} \partial_\mu \phi_{i\alpha} - m^2 \phi^*_{i\alpha} \phi_{i\alpha} - \lambda (\phi^*_{i\alpha} \phi_{i\alpha})^2.$$

Введем два калибровочных поля: для групы $SU(n)$ - A_μ и $SU(m)$ -B_μ:

$$A_\mu(x) = -igt^a A^a_\mu(x),$$
$$B_\mu(x) = -i\tilde{g}\tilde{t^p} B^p_\mu(x).$$

Пример не простой группы

Производную изменим на ковариантную таким образом:

$$(D_\mu \phi)_{i\alpha} = \partial_\mu \phi_{i\alpha} + (A_\mu)_{ij}\phi_{j\alpha} + (B_\mu)_{\alpha\beta}\phi_{i\beta}.$$

Тогда лагранжиан принимает вид

$$L = (D_\mu \phi)^*_{i\alpha}(D_\mu \phi)_{i\alpha} - m^2 \phi^*_{i\alpha}\phi_{i\alpha} - \lambda(\phi^*_{i\alpha}\phi_{i\alpha})^2 - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{F}^p_{\mu\nu} \tilde{F}^p_{\mu\nu}.$$