

# Нарушение дискретной симметрии

Журавлев Юрий

17.04.2020

# Повторение

Ранее мы учились строить теории, содержащие неабелевы симметрии, например теория Янга-Миллса:

# Повторение

Ранее мы учились строить теории, содержащие неабелевы симметрии, например теория Янга-Миллса:

$$S_A = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right), \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

# Повторение

Ранее мы учились строить теории, содержащие неабелевы симметрии, например теория Янга-Миллса:

$$S_A = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right), \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Но для того, чтоб описывать реальность этого мало, поскольку, как правило, симметрии нарушены.

# Явление нарушения симметрии

Вот несколько примеров нарушения симметрии:

- переход вода  $\rightarrow$  лед (жидкость  $\rightarrow$  кристалл)

# Явление нарушения симметрии

Вот несколько примеров нарушения симметрии:

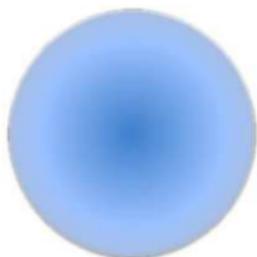
- переход вода  $\rightarrow$  лед (жидкость  $\rightarrow$  кристалл)
- переход парамагнетик  $\rightarrow$  ферромагнетик

# Явление нарушения симметрии

Вот несколько примеров нарушения симметрии:

- переход вода  $\rightarrow$  лед (жидкость  $\rightarrow$  кристалл)
- переход парамагнетик  $\rightarrow$  ферромагнетик
- переход проводник  $\rightarrow$  сверхпроводник

# Явление нарушения симметрии



$$\psi = 0$$



$$\psi \neq 0$$

**Рис.:** пример нарушения сферической симметрии до симметрии шестиугольника при охлаждении. Буквой  $\psi$  обозначен некоторый параметр порядка

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

В теории имеется симметрия:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x) \quad (2)$$

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

В теории имеется симметрия:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x) \quad (2)$$

Такая симметрия называется дискретной.

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

В теории имеется симметрия:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x) \quad (2)$$

Такая симметрия называется дискретной. Найдём функционал энергии в такой теории:

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

В теории имеется симметрия:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x) \quad (2)$$

Такая симметрия называется дискретной. Найдём функционал энергии в такой теории:

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (3)$$

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб  $\lambda > 0$ , а  $m^2$  может быть любым.

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб  $\lambda > 0$ , а  $m^2$  может быть любым.

Поискем теперь **основное состояние** теории или другими словами, конфигурацию поля с минимально возможной энергией.

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб  $\lambda > 0$ , а  $m^2$  может быть любым.

Поискем теперь **основное состояние** теории или другими словами, конфигурацию поля с минимально возможной энергией. Ясно, что нужно положить:

$$\partial_0 \varphi = 0, \quad \partial_i \varphi = 0 \quad (5)$$

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0\varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб  $\lambda > 0$ , а  $m^2$  может быть любым.

Поискем теперь **основное состояние** теории или другими словами, конфигурацию поля с минимально возможной энергией. Ясно, что нужно положить:

$$\partial_0\varphi = 0, \quad \partial_i\varphi = 0 \quad (5)$$

То бишь  $\varphi = \text{const}$

## Скалярное поле с $Z_2$ симметрией

Для того, чтоб энергия поля была ограничена снизу,

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \quad (4)$$

необходимо, чтоб  $\lambda > 0$ , а  $m^2$  может быть любым.

Поискем теперь **основное состояние** теории или другими словами, конфигурацию поля с минимально возможной энергией. Ясно, что нужно положить:

$$\partial_0 \varphi = 0, \quad \partial_i \varphi = 0 \quad (5)$$

То бишь  $\varphi = \text{const}$ , которую можно найти минимизируя потенциал.

## Основные состояния

В зависимости от знака  $m^2$  потенциал:

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6)$$

имеет разные минимумы:

## Основные состояния

В зависимости от знака  $m^2$  потенциал:

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6)$$

имеет разные минимумы:

- $m^2 \geq 0$

## Основные состояния

В зависимости от знака  $m^2$  потенциал:

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6)$$

имеет разные минимумы:

- $m^2 \geq 0 \Rightarrow \varphi = 0$

## Основные состояния

В зависимости от знака  $m^2$  потенциал:

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6)$$

имеет разные минимумы:

- $m^2 \geq 0 \Rightarrow \varphi = 0$
- $m^2 < 0$

# Основные состояния

В зависимости от знака  $m^2$  потенциал:

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (6)$$

имеет разные минимумы:

- $m^2 \geq 0 \Rightarrow \varphi = 0$
- $m^2 < 0 \Rightarrow \varphi = \pm\varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}$

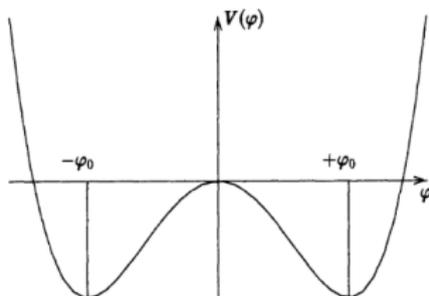


Рис.: Потенциал  $V(\varphi)$  при  $m^2 < 0$

# Выбор вакуума

- Если откачать у системы энергию, то рано или поздно, она окажется в вакуумном состоянии.

# Выбор вакуума

- Если откачать у системы энергию, то рано или поздно, она окажется в вакуумном состоянии.
- В случае  $m^2 < 0$  есть два кандидата на роль вакуума. В отсутствии внешнего возбуждения система переходит в один из вакуумов совершенно случайно.

# Выбор вакуума

- Если откачать у системы энергию, то рано или поздно, она окажется в вакуумном состоянии.
- В случае  $m^2 < 0$  есть два кандидата на роль вакуума. В отсутствии внешнего возбуждения система переходит в один из вакуумов совершенно случайно.
- После того, как система оказалась в вакуумном состоянии, к примеру в  $\varphi_0$ , для того, чтобы перейти в  $-\varphi_0$  необходимо затратить энергию порядка объема системы.

# Малые возбуждения около вакуума

Рассмотрим возмущения около вакуума  $\varphi_0$ :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x) \quad (7)$$

# Малые возбуждения около вакуума

Рассмотрим возмущения около вакуума  $\varphi_0$ :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x) \quad (7)$$

Получим лагранжиан для поля  $\chi$ :

$$\mathcal{L}_\chi(\chi) = \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) \quad (8)$$

# Малые возбуждения около вакуума

Рассмотрим возмущения около вакуума  $\varphi_0$ :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x) \quad (7)$$

Получим лагранжиан для поля  $\chi$ :

$$\mathcal{L}_\chi(\chi) = \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \quad (9)$$

## Малые возмущения около вакуума

Рассмотрим возмущения около вакуума  $\varphi_0$ :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x) \quad (7)$$

Получим лагранжиан для поля  $\chi$ :

$$\mathcal{L}_\chi(\chi) = \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi) \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \quad (9)$$

данный лагранжиан уже не  $Z_2$ -инвариантен.

## Остатки прежней симметрии

След симметрии  $\varphi \rightarrow -\varphi$  остался в виде соотношения между массой поля  $\chi$  и константами кубического и четверного взаимодействия. Произвольный лагранжиан с кубическими и четверными членами взаимодействия выглядит так:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \alpha \chi^3 - \frac{\beta}{4} \chi^4 \quad (10)$$

## Остатки прежней симметрии

След симметрии  $\varphi \rightarrow -\varphi$  остался в виде соотношения между массой поля  $\chi$  и константами кубического и четвертого взаимодействия. Произвольный лагранжиан с кубическими и четвертными членами взаимодействия выглядит так:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \alpha \chi^3 - \frac{\beta}{4} \chi^4 \quad (10)$$

А в спонтанно нарушенной теории:

$$m_\chi^2 = 2\mu^2, \quad \alpha = \sqrt{\lambda}\mu, \quad \beta = \lambda \quad (11)$$

# Итоги

- явление спонтанного нарушения глобальной симметрии состоит в том, что основное состояние не инвариантно относительно симметрии лагранжиана;

# Итоги

- явление спонтанного нарушения глобальной симметрии состоит в том, что основное состояние не инвариантно относительно симметрии лагранжиана;
- Лагранжиан возмущений также не обладает исходной симметрией;

# Итоги

- явление спонтанного нарушения глобальной симметрии состоит в том, что основное состояние не инвариантно относительно симметрии лагранжиана;
- Лагранжиан возмущений также не обладает исходной симметрией;
- Память о симметрии проявляется в виде соотношений между константами связи и массами возмущений.

# Фазовый переход в ферромагнетике

- В качестве примера рассмотрим теорию возникновения намагниченности в ферромагнетике.

# Фазовый переход в ферромагнетике

- В качестве примера рассмотрим теорию возникновения намагниченности в ферромагнетике.
- При высоких температурах никакой намагниченности нет, при малых же она появляется, причем в отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность возникает в некотором произвольном направлении.

# Фазовый переход в ферромагнетике

- В качестве примера рассмотрим теорию возникновения намагниченности в ферромагнетике.
- При высоких температурах никакой намагниченности нет, при малых же она появляется, причем в отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность возникает в некотором произвольном направлении.
- То бишь ниже некоторой температуры  $T = T_c$  намагниченность начинает расти.

# Фазовый переход в ферромагнетике

- В качестве примера рассмотрим теорию возникновения намагниченности в ферромагнетике.
- При высоких температурах никакой намагниченности нет, при малых же она появляется, причем в отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность возникает в некотором произвольном направлении.
- То бишь ниже некоторой температуры  $T = T_c$  намагниченность начинает расти.
- Выпишем свободную энергию магнетика вблизи  $T = T_c$ :

$$F = \int d^D x (a(T) + r(T)\psi^2(x) + s(T)\psi^4(x) + f(T)(\nabla\psi(x))^2) \quad (12)$$

# Фазовый переход в ферромагнетике

Термодинамически, наиболее выгодным состоянием, в отсутствии внешнего поля, есть минимум свободной энергии:

$$F = \int d^D x (a(T) + r(T)\psi^2(x) + s(T)\psi^4(x) + f(T)(\nabla\psi(x))^2) \quad (13)$$

Если положить  $r(T) = r_0 \cdot (T - T_c)$ , то выше  $T_c$  основное состояние будет  $\psi = 0$ , а ниже  $T_c$ :

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{-r_0(T - T_c)}{2s}} \quad (14)$$

# Фазовый переход в модели Изинга

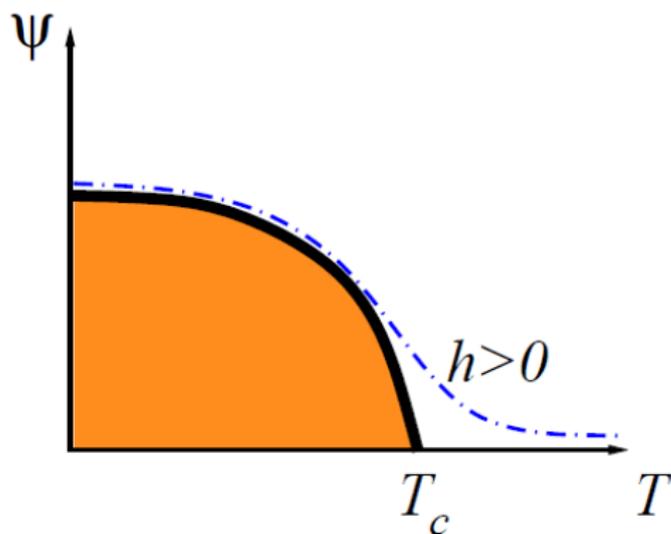


Рис.: Намагниченность в модели Изинга в теории Ландау

Конец

Спасибо за внимание!